טורים והתמרות

פרק 4 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

1. סדרות פונקציות 1
2. טורי פונקציות 4
3. טורי חזקות 6
4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות 8

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

1) $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

2) $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

3) $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

4) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

5) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

6) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

7) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

8) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

9) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

10) $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

11) $f_n(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le 1-\dfrac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1-\dfrac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$ ב- $[0,1]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1,\infty)$?

14) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.

ב. רק אם $\alpha<0$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad(-1\le x\le 1)$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$ $\quad\left(\frac{1}{4}\le x\le 4\right)$

11) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ $\quad(-a\le x\le a)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x > 0$
2) $x \neq 5$
3) $x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$
4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$
5) $x > 0$
6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$
7) מתכנס במידה שווה.
8) מתכנס במידה שווה.
9) מתכנס במידה שווה.
10) מתכנס במידה שווה.
11) מתכנס במידה שווה.
12) מתכנס במידה שווה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

13) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **15)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

16) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **17)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **18)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

19) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **20)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

<u>הערות חשובות</u>

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-1 \le x < 1\ ,\ R = 1$

2) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

3) $-0.2 \le x \le 0.2\ ,\ R = 0.2$

4) $-1 \le x \le 1\ ,\ R = 1$

5) $-3 < x \le -1\ ,\ R = 1$

6) $-1 < x < 1\ ,\ R = 1$

7) $x = 1\ ,\ R = 0$

8) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

9) $-5 < x \le 3\ ,\ R = 4$

10) $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}\ ,\ R = 4/3$

11) $-9 \le x \le 11\ ,\ R = 10$

12) $-7 < x < -3\ ,\ R = 2$

13) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

14) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

15) $(|x|<\frac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

16) $(|x|<5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

17) $(|x|<\frac{1}{4})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

18) $(|x|<3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

19) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

20) $(|x|<\frac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

1) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x)=\ln(1+x)$

3) $f(x)=\ln(1-x)$

4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

5) $f(x)=\ln(5-x)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$

7) $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

8) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$.

9) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

5) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

8) $\frac{20}{27}$

9) $\frac{2}{(1-x)^3}$ $|x|<1$

10) א. $|x|<1$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

11) א. $|x|<1$ $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$ ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

12) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

13) $|x|\le 1$ $\arctan x$

כתב ופתר – גיא סלומון ©