

# אנליזה מתקדמת

פרק 13 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

1	.....	1. סדרות פונקציות
4	.....	2. טורי פונקציות
6	.....	3. טורי חזקות
8	.....	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

## סדרות פונקציות

### שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1) + 1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[0, 4]$  ?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[0, 4]$  ?  
 ג. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ד. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע  $[1, \infty)$  ?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[ n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = [1 - \chi_n(x)] \left( x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left( n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[1, \infty)$  ?  
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?  
 ב. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[1, \infty)$  ?

## תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \frac{\pi}{2}$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x^2}$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של  $\alpha$  ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום  $[1, \infty)$ , לפונקציה  $\frac{1}{x}$ .  
ב. רק אם  $\alpha < 0$ .

## טורי פונקציות

### שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם :

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left( \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

**תשובות סופיות**

(1)  $x > 0$

(2)  $x \neq 5$

(3)  $x < 3\frac{9}{10}$  or  $4\frac{1}{10}$

(4)  $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5)  $x > 0$

(6)  $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

## טורי חזקות

### שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \qquad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

### הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

### תשובות סופיות

- |  |  |
|--|--|
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2)                               | $-1 \leq x < 1, R = 1$ (1)   |
| $-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4)  | $-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3)  |
| $-1 < x < 1, R = 1$ (6)  | $-3 < x \leq -1, R = 1$ (5)  |
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8)                               | $x = 1, R = 0$ (7)   |
| $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10)                    | $-5 < x \leq 3, R = 4$ (9)   |
| $-7 < x < -3, R = 2$ (12)  | $-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11)   |
| $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14)                         | $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13)  |
| $( x  < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16)          | $( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15)                       |
| $( x  < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $( x  < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17)                      |
| $( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20)   | $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) |

## גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

### שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} \quad (8) \text{ חשבו את סכום הטור}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)x^{n-1} \quad (9) \text{ חשבו את סכום הטור}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

ב. מהו סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$  ?

11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

12) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

13) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

### תשובות סופיות

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (2) \qquad (|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4) \qquad (-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (6) \qquad (-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (5)$$

$$\frac{20}{27} \quad (8) \qquad (|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (10) \quad \text{א. } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \quad (11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{1}{10} \left( \frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (12)$$

$$\arctan x \quad |x| \leq 1 \quad (13)$$