ישומים סטטיסטיים להנדסת תעשיה וניהול

פרק 5 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי 1

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיווני) הוא מבחן להשוואת תוחלות $\left(\mu_{1..},\mu_k\right)$ של k אוכלוסיות שונות.
לכן, בניתוח שונות, <u>השערות</u> המחקר הן:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ (התוחלות של כל האוכלוסיות שוות)

$H_1:$ אחרת (לפחות שתיים מהתוחלות שונות)

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

2) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.
3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2.
4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels).
כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה:
נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i.

$n = \sum_{1}^{k} n_i$ - מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).

$\overline{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון,....., $\overline{X}_k$ -ממוצע המדגם ה- k -י.

$\overline{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

סכום ריבועים בין הקבוצות: $SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\bar{X}_i - \bar{X}\right]^2$

סכום ריבועים בתוך הקבוצות: $SS_W = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[n_i - 1\right] \bullet \hat{S}_i^2$

סכום ריבועים כללי: $SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
בין הקבוצות - B	SSB	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
בתוך הקבוצות - W	SSW	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$	
סה"כ - T	SST	$n-1$		

$$F=\frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}}\sim F\left(k-1,n-k\right)$$

אזור דחיית H_0 : $1-\alpha$: $F>F_{(k-1,n-k)}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש: קבוצה 1קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן".
כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.

א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?

ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.

ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.
להלן הציונים שהתקבלו:

"המתמיד"	"רבין"	"הס"
78	98	85
65	62	83
70	55	74
90	80	85
56		75

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.

ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?

ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.

ד. מלאו את טבלת ANOVA.

ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.

ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות.
בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.

ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.
האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים.
השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם : 10 מ״ג, 20 מ״ג ו-30 מ״ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה ניבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000
Within Groups	126.000	12	10.500		
Total	540.400	14			

pulse

Tukey HSD[a]

dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
30.00	5	71.0000	
20.00	5		80.2000
10.00	5		83.4000
Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

pulse
Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.

ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!

ד. לטבלת הANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת ״טוקי״. ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים:

א. כמה בתי ספר יש בעיר?

ב. כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?

ג. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%

ד. בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe[a]

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. משתנה בלתי תלוי: סוג התרופה.
משתנה תלוי: הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ב. ניתוח שונות חד כיווני
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$
הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונות.

ב. גודל המדגם: 14. משתנה ב"ת: בית הספר, בעל 3 רמות.

ג. $\bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$, $\bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29$, $\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$.

ד. להלן טבלה:

מקור השונות	SS	df	MS	F
B	200.6	2	100.3	
W	1904.75	11	173.2	
סה"כ	2105.35	13		0.58

ה. $F > 3.98$.

ו. נקבל את H_0 .

3) א. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1: otherwise$

ב. נדחה את H_0 .

ג. כן.

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

5) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1 : otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

6) להלן טבלה:

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450 ב 2		178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

7) א. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1 : otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. $\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30}$.

8) א. 5 ב. 25

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

ד. $(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל