

# סטטיסטיקה למנהל עסקים במסלולים מיוחדים (חלק שני)

פרק 25 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

1. הקדמה..... 1
2. תהליך ניתוח שונות דו כיווני..... 11

## ניתוח שונות דו-כיווני - הקדמה

### רקע

ראשית, נחזור על עיקרי ניתוח השונות החד-כיווני (חד-גורמי).

בניתוח שונות חד-כיווני יש משתנה תלוי יחיד, שהוא כמותי, ומשתנה בלתי תלוי יחיד, שהוא משתנה קטגוריאלי (משתנה שהערכים שלו שייכים למספר סופי של קטגוריות). המשתנה הקטגוריאלי נקרא לעתים גם גורם (פקטור), והקטגוריות שלו נקראות רמות. המטרה בניתוח שונות חד-כיווני היא לבדוק האם לגורם יש השפעה מובהקת על המשתנה התלוי. השערת האפס של המחקר בניתוח שונות חד-כיווני היא שבכל הקטגוריות יש אותה התוחלת, והשערת המחקר טוענת שיש לפחות שתי קטגוריות שבהן התוחלות שונות.

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 30 מטופלים בעלי משקל עודף, והם חולקו באקראי לשלוש קבוצות שוות בגודלן, כך שכל קבוצה קיבלה דיאטה נחקרת אחרת. כעבור שלושה חודשים בדקו את מספר הקילוגרמים שהפחית כל מטופל ממשקלו בתקופה זו. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם קיים הבדל בין הדיאטות מבחינת ההפחתה במשקל.

- מהו המשתנה התלוי במחקר?
- מהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? כמה רמות יש לו?
- מה הן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו מוסיפים עוד משתנה בלתי תלוי למחקר, כלומר עוד גורם שאנו רוצים לבדוק איך הוא משפיע על המשתנה התלוי. לכן בניתוח שונות דו-כיווני יש משתנה תלוי כמותי יחיד ושני משתנים בלתי תלויים שכל אחד מהם קטגוריאלי. כזכור, למשתנים הבלתי תלויים אנו קוראים גם גורמים (פקטורים), ומספר הקטגוריות של כל גורם נקרא גם מספר הרמות שלו. ניתוח שונות רב-כיווני או רב-גורמי הוא ניתוח שונות שבו יש יותר מגורם אחד, כלומר יותר ממשתנה בלתי תלוי קטגוריאלי אחד. בניתוח שונות דו-כיווני יש שני גורמים, בניתוח שונות תלת-גורמי יש שלושה גורמים וכו'. ככל שנוסיף גורמים, הניתוח הסטטיסטי יהיה מורכב יותר ויידרשו יותר תצפיות למחקר אבל כיוון שהוא יקטין את שונות הטעויות (שונות מקרית) וייתן יותר הסבר לשונות הכללית, כך שהמבחן יהיה עוצמתי יותר.

### המשך הדוגמה:

מבין 30 המטופלים שבמחקר 15 היו גברים ו-15 היו נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 5 גברים ו-5 נשים.

מה הם המשתנים הבלתי תלויים? כמה רמות יש לכל משתנה?

בניתוח שונות דו-כיוונית אנו בעצם רוצים לבדוק סימולטנית שלוש שאלות מחקר על אוכלוסיית כבדי המשקל:

- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה משימוש בדיאטות שונות?
- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה ממגדר שונה?
- האם יש השפעה משולבת (אינטראקציה) של שני הגורמים הנבדקים על הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל, כלומר האם צירוף של דיאטה מסוימת ומגדר מסוים מביא להפחתת משקל גדולה יותר או קטנה יותר מצירופים אחרים?

נסמן גורם אחד ב- $a$  ואת מספר הרמות שלו ב- $A$ . באותו האופן הגורם האחר יסומן ב- $b$ , ואת מספר הרמות שלו נסמן ב- $B$ . מספר הקבוצות הכולל שאנו יוצרים הוא  $A \cdot B$ .

### המשך הדוגמה:

- בחרו גורם אחד להיות  $a$  וגורם אחר להיות  $b$ . מהו  $A$  ומהו  $B$ ?
- כמה קבוצות שונות נוצרו במחקר?

נסמן ב- $m$  את מספר התצפיות בכל תא (בהנחה שהוא יהיה מספר קבוע). תא הוא שילוב של רמה מסוימת של גורם  $a$  עם רמה מסוימת של גורם  $b$ .

### המשך הדוגמה:

- כמה תאים (קבוצות) יש במחקר?
- מה ערכו של  $m$ ?
- מהו הקשר המתמטי בין  $m$  לבין  $n$ , גודל המדגם?

נסמן ב- $a_1$  את הרמה הראשונה של  $a$ , ב- $a_2$  את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.  
 נסמן ב- $b_1$  את הרמה הראשונה של  $b$ , ב- $b_2$  את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.  
 נסמן ב- $\mu_i$  את התוחלת ברמה  $a_i$ . נסמן ב- $\mu_j$  את התוחלת ברמה  $b_j$ . נסמן ב- $\mu_{ij}$  את התוחלת של תא  $ij$ .

#### המשך הדוגמה:

- מה המשמעות של  $\mu_1$  ושל  $\mu_2$ ?
- מה המשמעות של  $\mu_{12}$  ושל  $\mu_{21}$ ?

#### השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני

את השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני אפשר לרשום בצורות רבות:

לגורם  $a$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

לגורם  $b$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

אין אינטראקציה בין שני הגורמים:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

דרך אחרת היא שימוש בתוחלות:

$$H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots = \mu_{A.}$$

$H_1$  : אחרת

$$H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots = \mu_{.B}$$

$H_1$  : אחרת

$H_0$  : אין אינטראקציה בין שני הגורמים

$H_1$  : אחרת

המשך הדוגמה:

אם אנחנו מעוניינים לבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה הן ההשערות הנחקרות?

## שאלות

- (1) בחברת טקסטיל בחנו 4 סוגי בדים שונים מבחינת חוזקם. דגמו 5 חתיכות בד מכל סוג ובדקו את חוזק הקריעה של כל סוג בד.
- א. מהו המשתנה התלוי במחקר?
  - ב. כמה משתנים בלתי תלויים יש במחקר? מה הם?
  - ג. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?
- (2) במחקר בתחום הפסיכולוגיה נדגמו אנשים הסובלים מחרדות מסוגים שונים. כל מטופל סווג כסובל מאחד מסוגי החרדות הבאים: חרדה חברתית, חרדה כללית או אגורפוביה. במחקר השתתפו 6 מטופלים מכל סוג חרדה שצוין. המטופלים במחקר חולקו כך שכל מטופל היה צריך לעבור במשך שנה את אחד מהטיפולים הבאים: טיפול קוגניטיבי התנהגותי (CBT), טיפול קבוצתי או טיפול דיאלקטי התנהגותי (DBT). בכל סוג טיפול השתתפו 2 מטופלים מכל סוג חרדה. בסוף השנה נבדקו כל המטופלים וקיבלו ציון כמותי על השיפור במצבם הנפשי (משתנה כמותי). מטרת המחקר הייתה לבדוק האם סוג החרדה, סוג הטיפול והשילוב ביניהם משפיעים על המצב הנפשי של המטופלים.
- א. מהו גודל המדגם?
  - ב. מהו המשתנה התלוי במחקר הזה ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
  - ג. כמה קטגוריות יש לכל משתנה בלתי תלוי?
  - ד. כמה קבוצות שונות יש במערך המחקרי?
  - ה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במערך מחקרי זה?

**(3)** מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

| פלסטיק | זכוכית | סוג בקבוק / גובה המדף |
|--------|--------|-----------------------|
|        |        | גובה המדף             |
| 59     | 23     | נמוך                  |
| 63     | 32     |                       |
| 88     | 47     | בינוני                |
| 90     | 55     |                       |
| 51     | 40     | גבוה                  |
| 56     | 48     |                       |

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
- מהו מספר הרמות של כל גורם מחקרי?
- מה יהיו השערות המחקר אם יתבצע ניתוח שונות דו-כיוונית?
- מהו ערכו של  $m$  ומהו ערכו של  $n$ ?

4) יצרן של נוזל כביסה מעוניין לבחון שני נוזלי ניקוי מבחינת יעילותם בהסרת כתמים בשלוש רמות טמפרטורה. בכל אחד מששת הצירופים של סוג נוזל וטמפרטורה נבחנה יכולת הסרת הכתמים מבדים דומים, וניתן ציון בין 0 ל-15 (הציון הטוב ביותר).

| מספר סידורי | סוג הנוזל | טמפרטורה במעלות צלזיוס | ציון הסרת כתמים |
|-------------|-----------|------------------------|-----------------|
| 1           | C         | 30                     | 4               |
| 2           | C         | 30                     | 5               |
| 3           | C         | 30                     | 4               |
| 4           | C         | 30                     | 6               |
| 5           | C         | 40                     | 6               |
| 6           | C         | 40                     | 6               |
| 7           | C         | 40                     | 7               |
| 8           | C         | 40                     | 6               |
| 9           | C         | 60                     | 9               |
| 10          | C         | 60                     | 8               |
| 11          | C         | 60                     | 7               |
| 12          | C         | 60                     | 10              |
| 13          | w         | 30                     | 9               |
| 14          | w         | 30                     | 9               |
| 15          | w         | 30                     | 9               |
| 16          | w         | 30                     | 10              |
| 17          | w         | 40                     | 12              |
| 18          | w         | 40                     | 13              |
| 19          | w         | 40                     | 11              |
| 20          | w         | 40                     | 11              |
| 21          | w         | 60                     | 14              |
| 22          | w         | 60                     | 14              |
| 23          | w         | 60                     | 15              |
| 24          | w         | 60                     | 13              |

- א. כמה משתנים יש במחקר?
- ב. לגבי כל משתנה קבעו האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ג. כמה רמות יש לכל גורם?
- ד. אם נבצע ניתוח שונות דו-כיוונית, מה יהיו השערות המחקר?
- ה. רכזו את נתוני המחקר בטבלה שבה בשורות גורם אחד, בעמודות גורם שני ובתאים התוצאות שהתקבלו למשתנה התלוי.

(5) קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא משתנה קטגוריאל:

- א. מספר הניתוחים שעבר אדם בחייו.
- ב. אחוז האבטלה בישראל בחודש זה.
- ג. סוג הדם של חולה.
- ד. שונות הציונים בבחינת הבגרות באנגלית במועד האחרון.
- ה. משקל חבילה בדואר בגרמים.
- ו. היבשת שאירחה את משחקי המונדיאל.

#### **בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:**

- (6) משרד החינוך רוצה לבדוק עד כמה שיטת הוראה (יש 3 שיטות הוראה מקובלות) ומגדר משפיעים על ציוני הבגרות בהיסטוריה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים למחקר זה?
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
  - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
  - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
  - ד. מבחן T לתוחלת אחת.
- (7) מחלקת שירות הלקוחות של חברת החשמל דגמה עובדים כדי לבחון האם ככל שמספר שנות הוותק של נותן השירות גדול יותר גדל גם מספר הלקוחות שבו הוא מטפל במהלך משמרת. מהו המבחן הסטטיסטי שיכול לבדוק זאת?
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
  - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
  - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
  - ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל.

**(8)** האיחוד האירופי המשותף דגם 10 עובדים מתחום ההוראה בכל אחת מהמדינות הבאות: הולנד, צרפת, בלגיה, גרמניה ואוסטריה. לכל עובד בדקו את גובה המשכורת החודשית שלו ביורו. אם נרצה להשוות בין המדינות הללו מבחינת תוחלת השכר של עובדי ההוראה במדינה, מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני
- ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל

**(9)** בקו ייצור 2 סוגים של מכונות ו-3 רמות ותק של מפעיל המכונה (עד שנתיים במפעל, בין שנתיים ל- חמש שנים במפעל, יותר מחמש שנים במפעל). מנהל הייצור רוצה לבדוק אם קיימת השפעה של סוג המכונה והוותק של המפעיל על מספר המוצרים הפגומים שיוצאים מהמכונה. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

**(10)** במחקר נאספו הנתונים הבאים על קבוצת נחקרים:

1. כמה כוסות קפה הנחקר שותה ביום: לא שותה / 1-2 כוסות / יותר מ-2 כוסות.

2. מין הנחקר: גבר/אישה.

3. דופק (מספר פעימות בדקה) שעתיים אחרי הקימה.

מטרת המחקר הייתה לבדוק האם מספר כוסות הקפה שאדם שותה ביום משפיע על הדופק אצל גברים אחרת מאשר אצל נשים. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

- 11** במחקר יש משתנה כמותי אחד ושני גורמים שלכל אחד מהם שתי רמות. אילו מהמשפטים הבאים אינו נכון?
- א. אפשר מבחינה טכנית לבדוק כיצד כל גורם בנפרד משפיע על המשתנה התלוי באמצעות ניתוח שונות חד-כיווני שייערך לכל גורם בנפרד.
- ב. אפשר מבחינה טכנית להשוות בין התוחלות של כל רמה בגורם הראשון על ידי מבחן T להשוואת תוחלות.
- ג. אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות דו-כיווני במערך מחקרי זה.
- ד. כיוון שבמחקר יש בסך הכול שלושה משתנים, אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות תלת-כיווני.

### תשובות סופיות

- 1** א. חוזק הקריעה.  
ג. ניתוח שונות חד גורמי.
- 2** א. 18  
ב. המשתנה התלוי : ציון במצב הנפש. המשתנים הב"ת : סוג חרדה, סוג הטיפול.  
ג. 3,3  
ה. ניתוח שונות דו גורמי.
- 3** א. ניתוח שונות דו גורמי.  
ג.  $H_0$  : אין אינטראקציה,  $H_1$  : יש אינטראקציה. ד.  $m = 2, n = 12$
- 4** א. 3  
ב. משתנים ב"ת : סוג הנוזל, טמפרטורה. משתנה תלוי : ציון הסרת כתמים.  
ג. 3,2  
ד.  $H_0$  : אין אינטראקציה בין הגורמים,  $H_1$  : אחרת.  
ה. עיין בסרטון הוידאו.
- 5** א. כן.  
ג. כן.  
ה. תלוי.
- 6** ג.
- 7** ד
- 8** ב
- 9** ג
- 10** ג
- 11** ד

## תהליך ניתוח שונות דו כיווני – הליך מבחן

### רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקרניים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאלי", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמערך מסוג  $A \times B$ , כאשר  $A$  מייצג את מספר הרמות של גורם  $a$ , ו- $B$  מייצג את מספר הרמות של גורם  $b$ . במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך  $A \times B \times C$ , וכך הלאה.

### דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. כעבור שלושה חודשים מתחילת הדיאטה נשקלו כלל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחיתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחית כעבור שלושה חודשים.

| סוג<br>הדיאטה<br>\ מין | $b_1$         | $b_2$        | $b_3$         | סה"כ |
|------------------------|---------------|--------------|---------------|------|
| נשים                   | 8<br>4<br>0   | 6<br>8<br>10 | 4<br>6<br>8   | 54   |
| גברים                  | 6<br>10<br>14 | 0<br>2<br>4  | 9<br>12<br>15 | 72   |
| סה"כ                   | 42            | 30           | 54            | 126  |

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקת ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?

בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהליך של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות. ההנחות הן:

1.  $A \times B$  הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.
2. בכל  $A \times B$  האוכלוסיות המשתנה התלוי מתפלג נורמלית.
3. בכל  $A \times B$  האוכלוסיות אותה שונות,  $\sigma^2$ .

הערה: ניתוח שונות הוא מבחן רובסטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות. התיאוריה הסטטיסטית שפותחה התבססה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבוד טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטיקה.

#### בהמשך לדוגמה

רשמו את כל ההנחות הדרושות לביצוע ניתוח השונות.

### הליך המבחן

בניית טבלת ממוצעים

נבנה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא :

$\bar{X}_{i.}$  – ממוצע המדגם ברמה  $i$  של גורם  $a$

$\bar{X}_{.j}$  – ממוצע המדגם ברמה  $j$  של גורם  $b$

$\bar{X}_{ij}$  – ממוצע המדגם בתא  $ij$

### בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הממוצעים הבאה :

| סוג<br>הדיאטה<br>מין \ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\bar{X}_{i.}$ |
|------------------------|-------|-------|-------|----------------|
| נשים                   |       |       |       |                |
| גברים                  |       |       |       |                |
| $\bar{X}_{.j}$         |       |       |       |                |

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

**בניית טבלת ריבועי הפרשים מהממוצעים**

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא  $ij$  נחשב:  $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$

**בהמשך לדוגמה**

- מלאו את טבלת הפרשי הממוצעים:

| סוג<br>הדיאטה<br>מין \    | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $(\bar{X}_i - \bar{X})^2$ |
|---------------------------|-------|-------|-------|---------------------------|
| נשים                      |       |       |       |                           |
| גברים                     |       |       |       |                           |
| $(\bar{X}_j - \bar{X})^2$ |       |       |       |                           |

### חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים :

הסימון  $SS$  הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

$$SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^A (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם } a:$$

$$SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם } b:$$

$$SS_{ab} = m \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה:}$$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפיות בתא מהממוצע בתא):

$$SS_W = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפיות מהממוצע הכללי:

$$SS_T = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא:

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין אנו צריכים לחשב את כל חמשת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתית:  $SS_a + SS_b + SS_{ab}$ . השונות השיטתית היא שונות שמקורה בגורמים עצמים.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקרית:  $SS_W$ . השונות המקרית היא שונות שנקראת גם "שונות טעויות" או "שונות בתוך הקבוצות". זוהי שונות בין התצפיות שאינה נובעת מהגורמים הנחקרים. האות  $W$  מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות בתוך התאים.



בהמשך לדוגמה

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים :

$$SS_a =$$

$$SS_b =$$

$$SS_{ab} =$$

$$SS_T =$$

$$SS_W =$$

### חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב יעשה על ידי חלוקת ה-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשלוש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנקראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

| מקור השונות<br>Source of Variation | דרגות החופש<br>Degrees of Freedom | סכום ריבועי הסטיות מהממוצע<br>Sum of Squares | ממוצע ריבוע הסטייה<br>Mean Square | $F$                       |
|------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|
| $a$                                | $A - 1$                           | $SS_a$                                       | $MS_a$                            | $F_a = MS_a / MS_w$       |
| $b$                                | $B - 1$                           | $SS_b$                                       | $MS_b$                            | $F_b = MS_b / MS_w$       |
| $ab$                               | $(A - 1)(B - 1)$                  | $SS_{ab}$                                    | $MS_{ab}$                         | $F_{ab} = MS_{ab} / MS_w$ |
| Within                             | $AB(m - 1)$                       | $SS_w$                                       | $MS_w$                            |                           |
| Total                              | $n - 1 = ABm - 1$                 | $SS_T$                                       |                                   |                           |

בהמשך לדוגמה: מלאו את טבלת ניתוח השונות

| מקור השונות<br>Source of Variation | דרגות החופש<br>Degrees of Freedom | סכום ריבועי<br>הסטיות מהממוצע<br>Sum of Squares | ממוצע ריבוע<br>הסטייה<br>Mean Square | F |
|------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------|---|
| a                                  |                                   |                                                 |                                      |   |
| b                                  |                                   |                                                 |                                      |   |
| ab                                 |                                   |                                                 |                                      |   |
| Within                             |                                   |                                                 |                                      |   |
| Total                              |                                   |                                                 |                                      |   |

### כללי ההכרעה לבדיקת ההשערות

הסטטיסטי  $F_a$  מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם  $a$  ובין השונות המקרית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם  $a$  יש השפעה גדולה יותר על המשתנה התלוי.  $F_a$  יקבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקרית תקטן. הסטטיסטי מתפלג התפלגות F, ואזור הדחייה שלו יהיה בצד ימין.

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם  $a$ :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_a > F_{1-\alpha}(df_a, df_w)$$

לפי אותו עיקרון שאר כללי ההכרעה יהיו:

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם  $b$ :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_b > F_{1-\alpha}(df_b, df_w)$$

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של האינטראקציה:

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha}(df_{ab}, df_w)$$

### בהמשך לדוגמה

רשמו את כל כללי ההכרעה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

### הערות

1. אם מכריעים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיוון שהוא נובע מהאינטראקציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגי הטיפולים, לא נוכל לדעת לפי זה איזה טיפול שונה מאחר באופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

### בהמשך לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?

## שאלות

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

| פלסטיק | זכוכית | סוג בקבוק / גובה המדף |
|--------|--------|-----------------------|
|        |        | גובה המדף             |
| 59     | 23     | נמוך                  |
| 63     | 32     |                       |
| 88     | 47     | בינוני                |
| 90     | 55     |                       |
| 51     | 40     | גבוה                  |
| 56     | 48     |                       |

בצעו ניתוח שונות דו-כיוונית על נתוני מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע המבחן?

**(2)** במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקות אדמה : 4 חלקות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יכול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה. להלן התוצאות שהתקבלו :

| מספר חלקה | מיקום החלקה | שיטת השקיה | יכול העגבניות |
|-----------|-------------|------------|---------------|
| 1         | נגב         | ממטרות     | 12            |
| 2         | נגב         | ממטרות     | 10            |
| 3         | נגב         | טפטפות     | 15            |
| 4         | נגב         | טפטפות     | 17            |
| 5         | עמק יזרעאל  | ממטרות     | 12            |
| 6         | עמק יזרעאל  | ממטרות     | 14            |
| 7         | עמק יזרעאל  | טפטפות     | 17            |
| 8         | עמק יזרעאל  | טפטפות     | 19            |

- א. רשמו את כלל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמדגם יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגם? האם האפקטים מובהקים?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובהק והאם האינטראקציה היא מובהקת. מה הן ההנחות הדרושות?

- (3) חברה לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשנית לצבע לשיער שאינו דורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוותה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הכיסוי וזאת על שלושה סוגי שיער: בהיר, כהה ושיבה. ציון רמת הכיסוי הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבוצה של סוג צבע וסוג שיער נדגמו 4 צביעות שנוסו על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הכיסוי. להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

| שונות | ממוצע | הקבוצה                |
|-------|-------|-----------------------|
| 40    | 62    | צבע רגיל על שיער בהיר |
| 44    | 51    | צבע רגיל על שיער כהה  |
| 42    | 45    | צבע רגיל על שיער שיבה |
| 46    | 60    | צבע חדש על שיער בהיר  |
| 40    | 54    | צבע חדש על שיער כהה   |
| 42    | 44    | צבע חדש על שיער שיבה  |

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

- (4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם  $a$  יש 4 רמות ולגורם  $b$  יש 3 רמות. נערכו 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונות דו-גורמי שבוצע:

| מקור השונות | $df$ | SS  | MS | F |
|-------------|------|-----|----|---|
| $a$         | ?    | 318 | ?  | ? |
| $b$         | ?    | ?   | ?  | ? |
| אינטראקציה  | ?    | 190 | ?  | ? |
| $W$         | ?    | 156 | ?  |   |
| $T$         | ?    | 674 |    |   |

- מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.
- בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:
  - האם האינטראקציה מובהקת?
  - האם גורם  $a$  משפיע על המשתנה התלוי הנחקר?
  - האם לגורם  $b$  יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

5) במחקר בדקו האם ארץ מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שנות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלת ניתוח שונות:

| מקור השונות | df | SS | MS  | F |
|-------------|----|----|-----|---|
| ארץ מוצא    | 4  | 34 |     |   |
| מגדר        |    |    | 2   |   |
| אינטראקציה  |    | 18 | 4.5 |   |
| W           | 10 | 12 |     |   |
| T           |    |    |     |   |

- כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?
- מהו גודל המדגם הכולל במחקר זה?
- חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור ארץ המוצא, המגדר והאינטראקציה.
- מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

6) בטבלה הבאה מסוכמים הממוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי:

|       | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$ | 8     | 14    | 11    |
| $a_2$ | 6     | 13    | 16    |

מספר התצפיות בכל תא הוא 5.  
הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה:

| מקור השונות | df | SS    | MS | F |
|-------------|----|-------|----|---|
| $a$         |    |       |    |   |
| $b$         |    | 281.7 |    |   |
| $ab$        |    | 71.7  |    |   |
| $W$         |    | 190.1 |    |   |
| $T$         |    |       |    |   |

- מלאו את טבלת ניתוח השונות.
- הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.
- שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

### תשובות סופיות

- עייין בסרטון הוידאו.
- א. משתנים ב"ת: מיקום החלקה, שיטת השקיה. משתנה תלוי: יבול בטונה לדונם.  
ב. עייין בסרטון הוידאו.  
ג. עייין בסרטון הוידאו.
- עייין בסרטון הוידאו.
- א. עייין בסרטון הוידאו. ב. i. כן. ii. כן. iii. לא.
- א. 4. ב. 20. ג. עייין בסרטון הוידאו.
- ד. עייין בסרטון הוידאו.
- א. עייין בסרטון הוידאו. ב. עייין בסרטון הוידאו. ג. עייין בסרטון הוידאו.