

קורס השלמה במתמטיקה

פרק 39 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה

תוכן העניינים

1. רציפות במידה שווה לפי הגדרה.....1
2. תנאים לרציפות במידה שווה.....3
3. תנאים לשלילת רציפות במידה שווה.....5

רציפות במידה שווה לפי הגדרה

שאלות

הוכיחו את המשפטים בשאלות 1-4 :

(1) $f(x) = 7$ (פונקציה קבועה) רבמ"ש (רציפה במידה שווה) ב- $\mathbb{R}$.

(2) $f(x) = 2x + 3$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$.

(3) $f(x) = \sqrt{x}$ רבמ"ש ב- $[0, \infty)$.

(4) $f(x) = \sqrt{|x|} + 1$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$.

(5) נתונות שתי פונקציות f ו- g שרציפות במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו :

א. $f(g(x))$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

ב. $f(g(x))$ לא בהכרח חסומה ב- $\mathbb{R}$.

(6) נתון כי f רציפה במידה שווה ב- $[a, b]$, f רציפה במידה שווה ב- $[b, c]$.
הוכיחו כי f רציפה במידה שווה ב- $[a, c]$.
עשו זאת בשתי דרכים שונות: לפי ההגדרה ולפי משפט קנטור.

(7) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע פתוח I .
הוכיחו: אם f ו- g רבמ"ש בקטע, אז $f + g$ רבמ"ש בקטע.

(8) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע I .
הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם f ו- g רבמ"ש בקטע, אז $f \cdot g$ רבמ"ש בקטע.
ב. אם $f \cdot g$ רבמ"ש בקטע, אז f ו- g רבמ"ש בקטע.
ג. אם $f \neq 0$ ו- g רבמ"ש בקטע, אז f/g רבמ"ש בקטע.
ד. אם f ו- g לא חסומות בקטע, אז $f \cdot g$ לא רבמ"ש בקטע.

(9) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע פתוח I . הוכיחו: אם f ו- g חסומות ורבמ"ש בקטע, אז $f \cdot g$ רבמ"ש בקטע.

(10) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) , כך ש- f' חסומה בקטע (a, b) .
 א. הוכיחו שקיים $M > 0$, כך שלכל x ו- y ב- (a, b) מתקיים

$$|f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$$

 ב. הוכיחו ש- f רציפה במידה שווה ב- (a, b) .

(11) תהי f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע I , המקיימת $|f(x)| \geq c > 0$ לכל x

ב- I , ותהי $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, לכל x ב- I .

הוכיחו כי $g(x)$ רציפה במידה שווה ב- I .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תנאים לרציפות במידה שווה

שאלות

(1) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

(2) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = xe^{-x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $-\infty < x < \infty$.

(3) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

(4) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, \infty)$.

(5) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \ln x$ רציפה במידה שווה בקטע $[1, \infty)$.

(6) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[1, \infty)$.

(7) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

(8) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$.

(9) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$ רציפה במידה שווה ב- $[0, \infty)$.

(10) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

(11) תהי פונקציה $f(x)$ רציפה ומחזורית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תנאים לשלילת רציפות במידה שווה

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x^2$ בקטע $-\infty < x < \infty$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ בקטע $(0,1)$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = x \sin x$ בקטע $0 \leq x < \infty$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln x$ בקטע $0 < x < 1$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \ln(2\pi n) \right) = 0$

ב. הוכיחו כי $f(x) = \sin(e^x)$ אינה רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^x \sin x$ אינה רציפה במידה שווה ב- $[0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^x \sin x$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, 0]$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ רציפה במידה שווה בקטע $(-\infty, 0)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$.

(8) ענו על הסעיפים הבאים :

א. נתון כי $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $|f'(x)| \rightarrow \infty$ כאשר $x \rightarrow \infty$.

הוכיחו כי f לא רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי $f(x) = x \ln x$ אינה רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

ג. נתון כי $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- f' לא חסומה. הוכיחו כי ייתכן ש- f רציפה במידה שווה.

(9) נתון כי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f'(x) = e^x (\sin^4 x + \cos^4 x)$.

א. הוכיחו כי $\frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1$ לכל x .

ב. הוכיחו כי f אינה רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

ג. הוכיחו כי f רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, 0)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il