

# מתמטיקה מורחב

פרק 30 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה

תוכן העניינים

1. רציפות במידה שווה לפי הגדרה..... 1
2. תנאים לרציפות במידה שווה..... 3
3. תנאים לשלילת רציפות במידה שווה..... 5

## רציפות במידה שווה לפי הגדרה

### שאלות

הוכיחו את המשפטים בשאלות 1-4:

(1)  $f(x) = 7$  (פונקציה קבועה) רבמ"ש (רציפה במידה שווה) ב- $\mathbb{R}$ .

(2)  $f(x) = 2x + 3$  רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$ .

(3)  $f(x) = \sqrt{x}$  רבמ"ש ב- $[0, \infty)$ .

(4)  $f(x) = \sqrt{|x|} + 1$  רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$ .

(5) נתונות שתי פונקציות  $f$  ו- $g$  שרציפות במידה שווה ב- $\mathbb{R}$ . הוכיחו:

א.  $f(g(x))$  רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$ .

ב.  $f(g(x))$  לא בהכרח חסומה ב- $\mathbb{R}$ .

(6) נתון כי  $f$  רציפה במידה שווה ב- $[a, b]$ ,  $f$  רציפה במידה שווה ב- $[b, c]$ . הוכיחו כי  $f$  רציפה במידה שווה ב- $[a, c]$ . עשו זאת בשתי דרכים שונות: לפי ההגדרה ולפי משפט קנטור.

(7) נתונות שתי פונקציות  $f$  ו- $g$  בקטע פתוח  $I$ . הוכיחו: אם  $f$  ו- $g$  רבמ"ש בקטע, אז  $f + g$  רבמ"ש בקטע.

(8) נתונות שתי פונקציות  $f$  ו- $g$  בקטע  $I$ . הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  רבמ"ש בקטע, אז  $f \cdot g$  רבמ"ש בקטע.  
 ב. אם  $f \cdot g$  רבמ"ש בקטע, אז  $f$  ו- $g$  רבמ"ש בקטע.  
 ג. אם  $f \neq 0$  ו- $g$  רבמ"ש בקטע, אז  $f/g$  רבמ"ש בקטע.  
 ד. אם  $f$  ו- $g$  לא חסומות בקטע, אז  $f \cdot g$  לא רבמ"ש בקטע.

(9) נתונות שתי פונקציות  $f$  ו- $g$  בקטע פתוח  $I$ . הוכיחו: אם  $f$  ו- $g$  חסומות ורבמ"ש בקטע, אז  $f \cdot g$  רבמ"ש בקטע.

(10) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f'$  חסומה בקטע  $(a, b)$ .

א. הוכיחו שקיים  $M > 0$ , כך שלכל  $x$  ו- $y$  ב- $(a, b)$  מתקיים

$$|f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$$

ב. הוכיחו ש- $f$  רציפה במידה שווה ב- $(a, b)$ .

(11) תהי  $f$  פונקציה רציפה במידה שווה בקטע  $I$ , המקיימת  $|f(x)| \geq c > 0$  לכל  $x$

$$\text{ב-} I, \text{ ותהי } g(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ לכל } x \text{ ב-} I.$$

הוכיחו כי  $g(x)$  רציפה במידה שווה ב- $I$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## תנאים לרציפות במידה שווה

### שאלות

(1) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  רציפה במידה שווה בקטע  $(0,1)$ .

(2) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = xe^{-x^2}$  רציפה במידה שווה בקטע  $-\infty < x < \infty$ .

(3) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$  רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$ .

(4) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = \arctan(x)$  רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, \infty)$ .

(5) הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = \ln x$  רציפה במידה שווה בקטע  $[1, \infty)$ .

(6) הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  רציפה במידה שווה בקטע  $[1, \infty)$ .

(7) הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = \arctan(x)$  רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$ .

(8) הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$  רציפה במידה שווה בקטע  $(0, \infty)$ .

(9) הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$  רציפה במידה שווה ב- $[0, \infty)$ .

(10) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$  רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$ .

**11** תהי פונקציה  $f(x)$  רציפה ומחזורית ב- $\mathbb{R}$ .

הוכיחו ש- $f(x)$  רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## תנאים לשלילת רציפות במידה שווה

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x^2$  בקטע  $-\infty < x < \infty$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  בקטע  $(0,1)$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = x \sin x$  בקטע  $0 \leq x < \infty$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(4) נתונה הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בקטע  $0 < x < 1$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \ln(2\pi n) \right) = 0$ .

ב. הוכיחו כי  $f(x) = \sin(e^x)$  אינה רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$ .

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = e^x \sin x$  אינה רציפה במידה שווה ב- $[0, \infty)$ .

ב. הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = e^x \sin x$  רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, 0]$ .

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  רציפה במידה שווה בקטע  $(-\infty, 0)$ .

ב. הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  אינה רציפה במידה שווה בקטע  $(0, \infty)$ .

(8) ענו על הסעיפים הבאים :

א. נתון כי  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה המקיימת  $|f'(x)| \rightarrow \infty$  כאשר  $x \rightarrow \infty$ .

הוכיחו כי  $f$  לא רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$ .

ב. הוכיחו כי  $f(x) = x \ln x$  אינה רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$ .

ג. נתון כי  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $f'$  לא חסומה. הוכיחו כי ייתכן ש- $f$  רציפה במידה שווה.

(9) נתון כי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה המקיימת  $f'(x) = e^x (\sin^4 x + \cos^4 x)$ .

א. הוכיחו כי  $\frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1$  לכל  $x$ .

ב. הוכיחו כי  $f$  אינה רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$ .

ג. הוכיחו כי  $f$  רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, 0)$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)