# חשבון אינפיניטיסימלי 1

## פרק 33 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה

### תוכן העניינים

1. רציפות במידה שווה לפי הגדרה ..... 1
2. תנאים לרציפות במידה שווה ..... 3
3. תנאים לשלילת רציפות במידה שווה ..... 5

# רציפות במידה שווה לפי הגדרה

## שאלות

הוכיחו את המשפטים בשאלות **1-4**:

**1)** $f(x)=7$ (פונקציה קבועה) רבמ"ש (רציפה במידה שווה) ב- $\mathbb{R}$.

**2)** $f(x)=2x+3$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$.

**3)** $f(x)=\sqrt{x}$ רבמ"ש ב- $[0,\infty)$.

**4)** $f(x)=\sqrt{|x|+1}$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$.

**5)** נתונות שתי פונקציות $f$ ו- $g$ שרציפות במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו:
א. $f(g(x))$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.
ב. $f(g(x))$ לא בהכרח חסומה ב- $\mathbb{R}$.

**6)** נתון כי $f$ רציפה במידה שווה ב- $[a,b]$, $f$ רציפה במידה שווה ב- $[b,c]$.
הוכיחו כי $f$ רציפה במידה שווה ב- $[a,c]$.
עשו זאת בשתי דרכים שונות: לפי ההגדרה ולפי משפט קנטור.

**7)** נתונות שתי פונקציות $f$ ו- $g$ בקטע פתוח $I$.
הוכיחו: אם $f$ ו- $g$ רבמ"ש בקטע, אז $f+g$ רבמ"ש בקטע.

**8)** נתונות שתי פונקציות $f$ ו- $g$ בקטע $I$.
הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $f$ ו- $g$ רבמ"ש בקטע, אז $f\cdot g$ רבמ"ש בקטע.
ב. אם $f\cdot g$ רבמ"ש בקטע, אז $f$ ו- $g$ רבמ"ש בקטע.
ג. אם $f$ ו- $g\neq 0$ רבמ"ש בקטע, אז $f/g$ רבמ"ש בקטע.
ד. אם $f$ ו- $g$ לא חסומות בקטע, אז $f\cdot g$ לא רבמ"ש בקטע.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתונות שתי פונקציות $f$ ו- $g$ בקטע פתוח $I$.
הוכיחו: אם $f$ ו- $g$ חסומות ורבמ"ש בקטע, אז $f\cdot g$ רבמ"ש בקטע.

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $(a,b)$, כך ש- $f'$ חסומה בקטע $(a,b)$.
א. הוכיחו שקיים $M>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$ מתקיים
$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|$.
ב. הוכיחו ש- $f$ רציפה במידה שווה ב- $(a,b)$.

**11)** תהי $f$ פונקציה רציפה במידה שווה בקטע $I$, המקיימת $|f(x)|\ge c>0$ לכל $x$ ב- $I$, ותהי $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, לכל $x$ ב- $I$.
הוכיחו כי $g(x)$ רציפה במידה שווה ב- $I$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תנאים לרציפות במידה שווה

## שאלות

1) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

2) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=xe^{-x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $-\infty<x<\infty$.

3) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

4) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב-$(-\infty,\infty)$.

5) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\ln x$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

6) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

7) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב-$\mathbb{R}$.

8) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$.

9) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה ב-$[0,\infty)$.

10) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** תהי פונקציה $f(x)$ רציפה ומחזורית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תנאים לשלילת רציפות במידה שווה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x^2$ בקטע $-\infty<x<\infty$.
הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ בקטע $(0,1)$.
הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

**3)** נתונה הפונקציה $f(x)=x\sin x$ בקטע $0\le x<\infty$.
הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\ln x$ בקטע $0<x<1$.
הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)-\ln(2\pi n)\right)=0$.

ב. הוכיחו כי $f(x)=\sin\left(e^x\right)$ אינה רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=e^x\sin x$ אינה רציפה במידה שווה ב- $[0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=e^x\sin x$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty,0]$.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ רציפה במידה שווה בקטע $(-\infty,0)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $|f'(x)|\to\infty$, כאשר $x\to\infty$.
הוכיחו כי $f$ לא רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $f(x)=x\ln x$ אינה רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

ג. נתון כי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש-$f'$ לא חסומה.
הוכיחו כי ייתכן ש-$f$ רציפה במידה שווה.

**9)** נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f'(x)=e^x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$.

א. הוכיחו כי $\frac{1}{2}\le\sin^4 x+\cos^4 x\le 1$ לכל $x$.

ב. הוכיחו כי $f$ אינה רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

ג. הוכיחו כי $f$ רציפה במידה שווה ב-$(-\infty,0)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©