חדוא 1 א

פרק 8 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה

תוכן העניינים

1. רציפות במידה שווה לפי הגדרה 1
2. תנאים לרציפות במידה שווה 3
3. תנאים לשלילת רציפות במידה שווה 5

רציפות במידה שווה לפי הגדרה

שאלות

הוכיחו את המשפטים בשאלות **1-4**:

1) $f(x)=7$ (פונקציה קבועה) רבמ"ש (רציפה במידה שווה) ב- $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=2x+3$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\sqrt{x}$ רבמ"ש ב- $[0,\infty)$.

4) $f(x)=\sqrt{|x|+1}$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$.

5) נתונות שתי פונקציות f ו- g שרציפות במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו:
א. $f(g(x))$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.
ב. $f(g(x))$ לא בהכרח חסומה ב- $\mathbb{R}$.

6) נתון כי f רציפה במידה שווה ב- $[a,b]$, f רציפה במידה שווה ב- $[b,c]$.
הוכיחו כי f רציפה במידה שווה ב- $[a,c]$.
עשו זאת בשתי דרכים שונות: לפי ההגדרה ולפי משפט קנטור.

7) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע פתוח I.
הוכיחו: אם f ו- g רבמ"ש בקטע, אז $f+g$ רבמ"ש בקטע.

8) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע I.
הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם f ו- g רבמ"ש בקטע, אז $f\cdot g$ רבמ"ש בקטע.
ב. אם $f\cdot g$ רבמ"ש בקטע, אז f ו- g רבמ"ש בקטע.
ג. אם f ו- $g\neq 0$ רבמ"ש בקטע, אז f/g רבמ"ש בקטע.
ד. אם f ו- g לא חסומות בקטע, אז $f\cdot g$ לא רבמ"ש בקטע.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע פתוח I.
הוכיחו: אם f ו- g חסומות ורבמ"ש בקטע, אז $f\cdot g$ רבמ"ש בקטע.

10) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b), כך ש- f' חסומה בקטע (a,b).

א. הוכיחו שקיים $M>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b) מתקיים
$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|$.

ב. הוכיחו ש- f רציפה במידה שווה ב- (a,b).

11) תהי f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע I, המקיימת $|f(x)|\ge c>0$ לכל x ב- I, ותהי $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, לכל x ב- I.
הוכיחו כי $g(x)$ רציפה במידה שווה ב- I.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תנאים לרציפות במידה שווה

שאלות

1) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

2) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=xe^{-x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $-\infty<x<\infty$.

3) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

4) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב-$(-\infty,\infty)$.

5) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\ln x$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

6) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

7) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב-$\mathbb{R}$.

8) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$.

9) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה ב-$[0,\infty)$.

10) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) תהי פונקציה $f(x)$ רציפה ומחזורית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תנאים לשלילת רציפות במידה שווה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x^2$ בקטע $-\infty<x<\infty$.
הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=e^x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ בקטע $(0,1)$.
הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=x\sin x$ בקטע $0\le x<\infty$.
הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\ln x$ בקטע $0<x<1$.
הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)-\ln(2\pi n)\right)=0$.

ב. הוכיחו כי $f(x)=\sin\left(e^x\right)$ אינה רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=e^x\sin x$ אינה רציפה במידה שווה ב- $[0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=e^x\sin x$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty,0]$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ רציפה במידה שווה בקטע $(-\infty,0)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $|f'(x)|\to\infty$,
כאשר $x\to\infty$.
הוכיחו כי f לא רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $f(x)=x\ln x$ אינה רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

ג. נתון כי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש-f' לא חסומה.
הוכיחו כי ייתכן ש-f רציפה במידה שווה.

9) נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f'(x)=e^x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$.

א. הוכיחו כי $\frac{1}{2}\le\sin^4 x+\cos^4 x\le 1$ לכל x.

ב. הוכיחו כי f אינה רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

ג. הוכיחו כי f רציפה במידה שווה ב-$(-\infty,0)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©