

אנליזה ב

פרק 30 - נושאים מתקדמים - רציפות במידה שווה

תוכן העניינים

1. רציפות במידה שווה לפי הגדרה..... 1
2. תנאים לרציפות במידה שווה..... 3
3. תנאים לשלילת רציפות במידה שווה..... 5

רציפות במידה שווה לפי הגדרה

שאלות

הוכיחו את המשפטים בשאלות 1-4 :

(1) $f(x) = 7$ (פונקציה קבועה) רבמ"ש (רציפה במידה שווה) ב- $\mathbb{R}$.

(2) $f(x) = 2x + 3$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$.

(3) $f(x) = \sqrt{x}$ רבמ"ש ב- $[0, \infty)$.

(4) $f(x) = \sqrt{|x|} + 1$ רבמ"ש ב- $\mathbb{R}$.

(5) נתונות שתי פונקציות f ו- g שרציפות במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו :

א. $f(g(x))$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

ב. $f(g(x))$ לא בהכרח חסומה ב- $\mathbb{R}$.

(6) נתון כי f רציפה במידה שווה ב- $[a, b]$, f רציפה במידה שווה ב- $[b, c]$.
הוכיחו כי f רציפה במידה שווה ב- $[a, c]$.
עשו זאת בשתי דרכים שונות: לפי ההגדרה ולפי משפט קנטור.

(7) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע פתוח I .
הוכיחו: אם f ו- g רבמ"ש בקטע, אז $f + g$ רבמ"ש בקטע.

(8) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע I .
הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם f ו- g רבמ"ש בקטע, אז $f \cdot g$ רבמ"ש בקטע.
ב. אם $f \cdot g$ רבמ"ש בקטע, אז f ו- g רבמ"ש בקטע.
ג. אם $f \neq 0$ ו- g רבמ"ש בקטע, אז f/g רבמ"ש בקטע.
ד. אם f ו- g לא חסומות בקטע, אז $f \cdot g$ לא רבמ"ש בקטע.

(9) נתונות שתי פונקציות f ו- g בקטע פתוח I . הוכיחו: אם f ו- g חסומות ורבמ"ש בקטע, אז $f \cdot g$ רבמ"ש בקטע.

(10) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) , כך ש- f' חסומה בקטע (a, b) .

א. הוכיחו שקיים $M > 0$, כך שלכל x ו- y ב- (a, b) מתקיים

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$

ב. הוכיחו ש- f רציפה במידה שווה ב- (a, b) .

(11) תהי f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע I , המקיימת $|f(x)| \geq c > 0$ לכל x

$$\text{ב- } I, \text{ ותהי } g(x) = \frac{1}{f(x)}, \text{ לכל } x \text{ ב- } I.$$

הוכיחו כי $g(x)$ רציפה במידה שווה ב- I .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תנאים לרציפות במידה שווה

שאלות

(1) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

(2) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = xe^{-x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $-\infty < x < \infty$.

(3) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

(4) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, \infty)$.

(5) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \ln x$ רציפה במידה שווה בקטע $[1, \infty)$.

(6) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[1, \infty)$.

(7) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \arctan(x)$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

(8) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$.

(9) הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$ רציפה במידה שווה ב- $[0, \infty)$.

(10) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

(11) תהי פונקציה $f(x)$ רציפה ומחזורית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו ש- $f(x)$ רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תנאים לשלילת רציפות במידה שווה

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x^2$ בקטע $-\infty < x < \infty$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ בקטע $(0,1)$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = x \sin x$ בקטע $0 \leq x < \infty$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln x$ בקטע $0 < x < 1$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה במידה שווה בקטע.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \ln(2\pi n) \right) = 0$

ב. הוכיחו כי $f(x) = \sin(e^x)$ אינה רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^x \sin x$ אינה רציפה במידה שווה ב- $[0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^x \sin x$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, 0]$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ רציפה במידה שווה בקטע $(-\infty, 0)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$.

(8) ענו על הסעיפים הבאים :

א. נתון כי $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $|f'(x)| \rightarrow \infty$ כאשר $x \rightarrow \infty$.

הוכיחו כי f לא רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

ב. הוכיחו כי $f(x) = x \ln x$ אינה רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

ג. נתון כי $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- f' לא חסומה. הוכיחו כי ייתכן ש- f רציפה במידה שווה.

(9) נתון כי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f'(x) = e^x (\sin^4 x + \cos^4 x)$.

א. הוכיחו כי $\frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1$ לכל x .

ב. הוכיחו כי f אינה רציפה במידה שווה ב- $(0, \infty)$.

ג. הוכיחו כי f רציפה במידה שווה ב- $(-\infty, 0)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il