

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 31 - נושאים מתקדמים - פונקציות טריגונומטריות

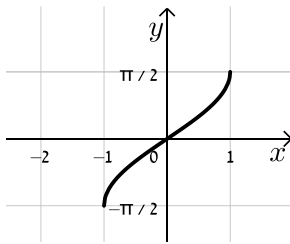
תוכן העניינים

1. נושאים מתקדמים - פונקציות טריגונומטריות.....1

נושאים מתקדמים – פונקציות טריגונומטריות

סיכום כללי

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות

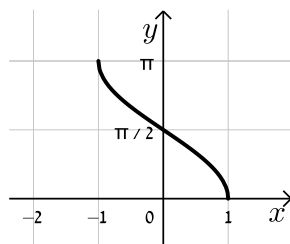


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = \arcsin(x)$:

סימון נוסף: $f(x) = \sin^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1 \leq x \leq 1$.

טווח: $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

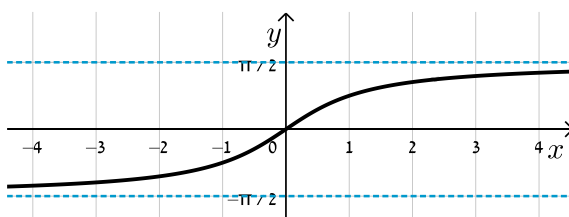


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = \arccos(x)$:

סימון נוסף: $f(x) = \cos^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1 \leq x \leq 1$.

טווח: $0 \leq f(x) \leq \pi$.

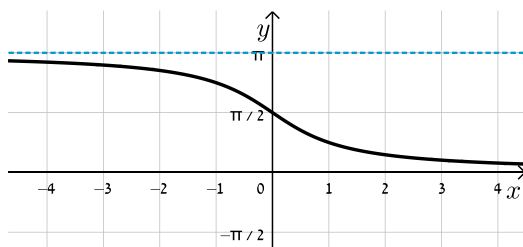


תיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = \arctan(x)$:

סימון נוסף: $f(x) = \tan^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty < x < \infty$.

טווח: $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$.



תיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$:

סימון נוסף: $f(x) = \cot^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty < x < \infty$.

טווח: $0 < f(x) < \pi$.

קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חז"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

| הפונקציה | הזהות |
|----------|---|
| | $\sin(\sin^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$ |
| סינוס | $\sin^{-1}(\sin(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi(k+1) - x & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$ |
| | $\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$ |
| קוסינוס | $\cos^{-1}(\cos(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & 2\pi k \leq x \leq \pi(1+2k) \\ 2\pi k - x & \pi(1+2k) \leq x \leq 2\pi(k+1) \end{cases}$ |
| | $\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$ |
| טנגנס | $\tan^{-1}(\tan(x)) = x - \pi k \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$ |
| | $\cot(\cot^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$ |
| קוטנגנס | $\cot^{-1}(\cot(x)) = x - \pi k \quad \pi k < x < \pi + \pi k$ |

שאלות

בשאלות 1-12 חשבו ללא מחשבון:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| $\arccos(-1)$ (2) | $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (1) |
| $\arctan(-\sqrt{3})$ (4) | $\text{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (3) |
| $\arcsin(-0.5)$ (6) | $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (5) |
| $\sin(\arcsin(-0.5))$ (8) | $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (7) |
| $\cos(\text{arccot}(1))$ (10) | $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ (9) |
| $\tan(-\text{arccot}(\sqrt{3}))$ (12) | $\sin(2\arctan(\sqrt{3}))$ (11) |

בשאלות 13-15 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות:

$$y = \arccos \frac{x+3}{2x+1} \quad (14)$$

$$y = \arcsin \frac{2x+1}{3-3x} \quad (13)$$

$$y = \arctan \frac{1}{1-\ln x} \quad (15)$$

בשאלות 16-19, הוכיחו כי לכל x מתחום ההגדרה מתקיים:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

$$\sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2} \quad (17)$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad (18)$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0 \quad (19)$$

(20) הראו את הקשר $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$.

תשובות סופיות

| | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|----------------------|
| $-\frac{\pi}{3}$ (4) | $\frac{\pi}{3}$ (3) | π (2) | $-\frac{\pi}{4}$ (1) |
| $-\frac{1}{2}$ (8) | $-\frac{\pi}{6}$ (7) | $-\frac{\pi}{6}$ (6) | ϕ (5) |
| $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (12) | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (11) | 1 (10) | $\frac{1}{2}$ (9) |
| $x > 0, x \neq e$ (15) | $x \leq -\frac{4}{3}, x \geq 2$ (14) | $x \leq \frac{2}{5}, x \geq 4$ (13) | |

(16) - (20) שאלות הוכחה.