חשבון אינפיניטיסימלי 1

פרק 23 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות 1
2. זהויות עם פונקציות היפרבוליות 3
3. נגזרות של פונקציות היפרבוליות 4
4. הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות 5
5. גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות 6

הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

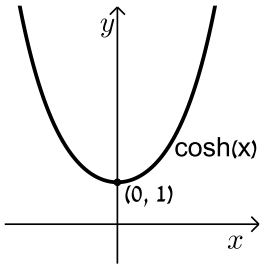
סיכום כללי

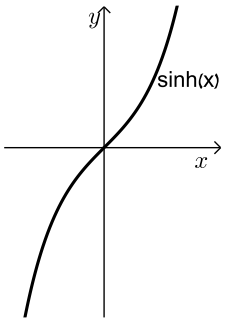
הפונקציות ההיפרבוליות

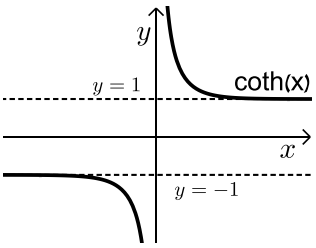
$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

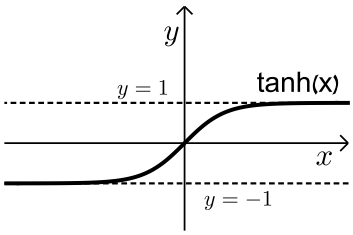
$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

תיאורים גרפיים









שאלות

1) חשבו את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית $\sinh(x)$, עבור $x=1$.

2) נתון כי $\sinh(x_0)=-1$.
חשבו את ערכן של הפונקציות $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$ ו-$\coth(x_0)$.

3) חשבו $\sinh(\ln 5)$.

4) חשבו $\tanh(-3\ln 2)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1.175

2) $\cosh(x_0)=\sqrt{2}$, $\tanh(x_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\coth(x_0)=-\sqrt{2}$

3) 2.4

4) $-\frac{63}{65}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זהויות עם פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות

ארגומנט שלילי	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	סינוס וקוסינוס היפרבוליים
$\cosh(-x)=\cosh(x)$	$1+\tanh^2(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(x)\pm\sinh(x)=e^{\pm x}$
$\sinh(-x)=-\sinh(x)$	$\coth^2(x)-1=\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

סכום והפרש ארגומנטים

$$\sinh(x\pm y)=\sinh(x)\cosh(y)\pm\cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$$

זהויות של ארגומנט כפול

$$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=2\sinh^2(x)+1=2\cosh^2(x)-1$$

שאלות

1) הוכיחו את הזהות $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$.

2) הוכיחו את הזהות הכפולה $\sinh\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}=\frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$,

בתחום $x\geq 0$.

3) הוכיחו את הזהות $\cosh^4(x)-\sinh^4(x)=\cosh(2x)$.

4) הוכיחו את הזהויות $\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרות של פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

<u>הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות</u>

$\left(\tanh\left(x\right)\right)'=\frac{1}{\cosh^2\left(x\right)}$	$\left(\sinh\left(x\right)\right)'=\cosh\left(x\right)$
$\left(\coth\left(x\right)\right)'=\frac{-1}{\sinh^2\left(x\right)}$	$\left(\cosh\left(x\right)\right)'=\sinh\left(x\right)$

שאלות

1) גזרו את הפונקציה $f\left(x\right)=\cosh\left(\ln x\right)$.

2) גזרו את הפונקציה $f\left(x\right)=\sinh\left(\tanh\left(x\right)\right)$.

3) גזרו את הפונקציה $f\left(x\right)=\cosh\left(\ln\left(\sin x\right)\right)$.

4) גזרו את הפונקציה $f\left(x\right)=\sinh^2\left(x^3\right)$.

תשובות סופיות

1) $f'\left(x\right)=\frac{\sinh\left(\ln x\right)}{x}$

2) $f'\left(x\right)=\frac{\cosh\left(\tanh\left(x\right)\right)}{\cosh^2\left(x\right)}$

3) $f'\left(x\right)=\sinh\left(\ln\left(\sin\left(x\right)\right)\right)\cdot\cot\left(x\right)$

4) $f'\left(x\right)=3x^2\sinh\left(2x^3\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

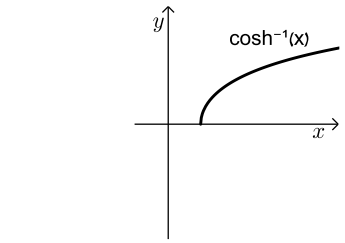
סיכום כללי

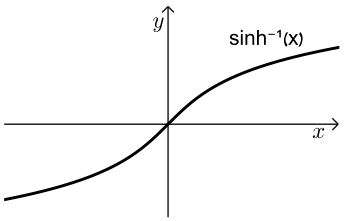
הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

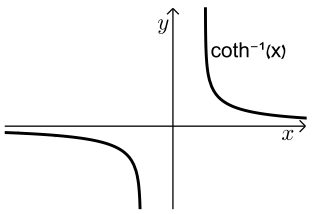
$$\sinh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad \tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

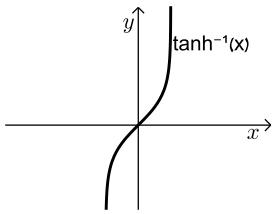
$$\cosh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad \coth^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

תיאורים גרפיים









הערה

קיים גם סימון של פונקציה הפוכה עם arc, למשל $\sinh^{-1}(x)=\operatorname{arcsinh}(x)$.

שאלות

1) הוכיחו כי $\sinh\left(\operatorname{arc}\cosh(x)\right)=\sqrt{x^2-1}$, לכל $|x|>1$.

2) הוכיחו כי $\cosh\left(\operatorname{arc}\tanh(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, לכל $|x|<1$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

סיכום כללי

<u>הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות</u>

$\left(\tanh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert<1$	$\left(\sinh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\left(\coth^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert>1$	$\left(\cosh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,x>1$

שאלות

1) גזרו את הפונקציה $f(x)=\ln\left(\operatorname{arcsinh}(x)\right)$.

2) גזרו את הפונקציה $f(x)=\ln\left(\cosh\left(\operatorname{arctanh}(x)\right)\right)$.

3) גזרו את הפונקציה $f(x)=\operatorname{arcsinh}\left(\operatorname{arccosh}\left(\tan(x)\right)\right)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$

2) $f'(x)=\frac{x}{1-x^2}$

3) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\cosh^{-1}(\tan x)\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x-1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©