# חשבון אינפיניטיסימלי 1

## פרק 35 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים


1. הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות ..... 1
2. זהויות עם פונקציות היפרבוליות ..... 3
3. נגזרות של פונקציות היפרבוליות ..... 4
4. הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות ..... 5
5. גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות ..... 6

# הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

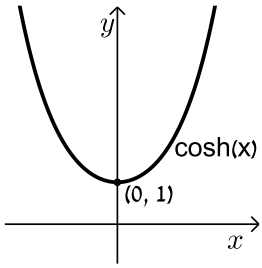
## סיכום כללי

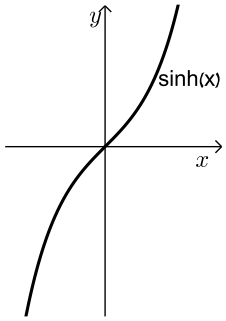
### הפונקציות ההיפרבוליות

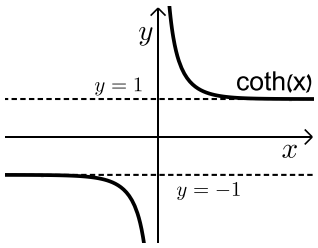
$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

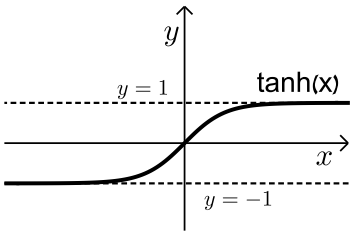
$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

### תיאורים גרפיים




## שאלות

**1)** חשבו את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית $\sinh(x)$, עבור $x=1$.

**2)** נתון כי $\sinh(x_0)=-1$.
חשבו את ערכן של הפונקציות $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$ ו-$\coth(x_0)$.

**3)** חשבו $\sinh(\ln 5)$.

**4)** חשבו $\tanh(-3\ln 2)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $1.175$

2) $\cosh(x_0)=\sqrt{2}$ , $\tanh(x_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , $\coth(x_0)=-\sqrt{2}$

3) $2.4$

4) $-\frac{63}{65}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# זהויות עם פונקציות היפרבוליות

## סיכום כללי

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות

| ארגומנט שלילי | טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים | סינוס וקוסינוס היפרבוליים |
|---|---|---|
| $\cosh(-x)=\cosh(x)$ | $1+\tanh^2(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}$ | $\cosh(x)\pm\sinh(x)=e^{\pm x}$ |
| $\sinh(-x)=-\sinh(x)$ | $\coth^2(x)-1=\frac{1}{\sinh^2(x)}$ | $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ |

| סכום והפרש ארגומנטים |
|---|
| $\sinh(x\pm y)=\sinh(x)\cosh(y)\pm\cosh(x)\sinh(y)$ |
| $\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$ |

| זהויות של ארגומנט כפול |
|---|
| $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$ |
| $\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=2\sinh^2(x)+1=2\cosh^2(x)-1$ |

## שאלות

**1)** הוכיחו את הזהות $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$.

**2)** הוכיחו את הזהות הכפולה $\sinh\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}=\frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$,

בתחום $x\geq 0$.

**3)** הוכיחו את הזהות $\cosh^4(x)-\sinh^4(x)=\cosh(2x)$.

**4)** הוכיחו את הזהויות $\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות של פונקציות היפרבוליות

## סיכום כללי

<u>הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות</u>

| | |
|---|---|
| $\left(\tanh(x)\right)' = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$ | $\left(\sinh(x)\right)' = \cosh(x)$ |
| $\left(\coth(x)\right)' = \dfrac{-1}{\sinh^2(x)}$ | $\left(\cosh(x)\right)' = \sinh(x)$ |

## שאלות

1) גזרו את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln x)$.

2) גזרו את הפונקציה $f(x) = \sinh(\tanh(x))$.

3) גזרו את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$.

4) גזרו את הפונקציה $f(x) = \sinh^2(x^3)$.

## תשובות סופיות

1) $f'(x) = \dfrac{\sinh(\ln x)}{x}$

2) $f'(x) = \dfrac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)}$

3) $f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x)$

4) $f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

## סיכום כללי

### הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

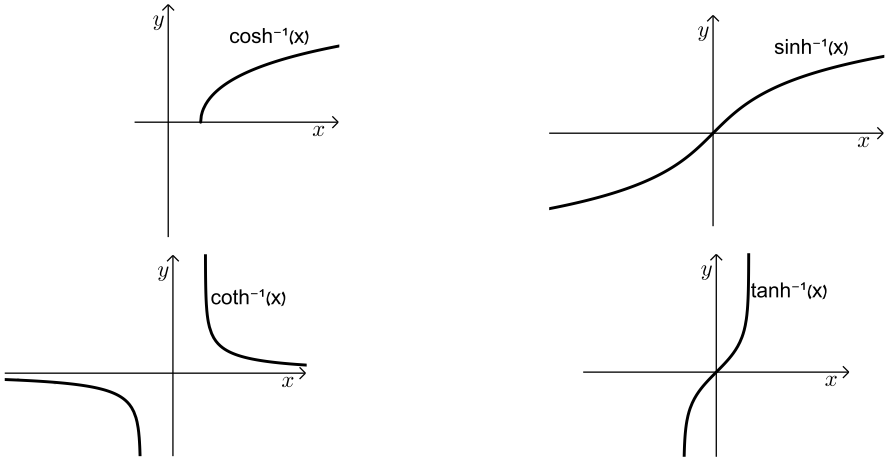
$$\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\coth^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\sinh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

### תיאורים גרפיים




### הערה

קיים גם סימון של פונקציה הפוכה עם arc , למשל $\sinh^{-1}(x)=\operatorname{arcsinh}(x)$ .

## שאלות

**1)** הוכיחו כי $\sinh\left(\operatorname{arc}\cosh(x)\right)=\sqrt{x^2-1}$ , לכל $|x|>1$ .

**2)** הוכיחו כי $\cosh\left(\operatorname{arc}\tanh(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , לכל $|x|<1$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

## סיכום כללי

<u>הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות</u>

| | |
|---|---|
| $\left(\tanh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert<1$ | $\left(\sinh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $\left(\coth^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert>1$ | $\left(\cosh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ x>1$ |

## שאלות

1) גזרו את הפונקציה $f(x)=\ln\left(\operatorname{arcsinh}(x)\right)$.

2) גזרו את הפונקציה $f(x)=\ln\left(\cosh\left(\operatorname{arctanh}(x)\right)\right)$.

3) גזרו את הפונקציה $f(x)=\operatorname{arcsinh}\left(\operatorname{arccosh}\left(\tan(x)\right)\right)$.

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$

2) $f'(x)=\frac{x}{1-x^2}$

3) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\cosh^{-1}(\tan x)\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x-1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©