

# חדו"א א

פרק 30 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות.....1
2. זהויות עם פונקציות היפרבוליות.....3
3. נגזרות של פונקציות היפרבוליות.....4
4. הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות.....5
5. גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות.....6

## הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

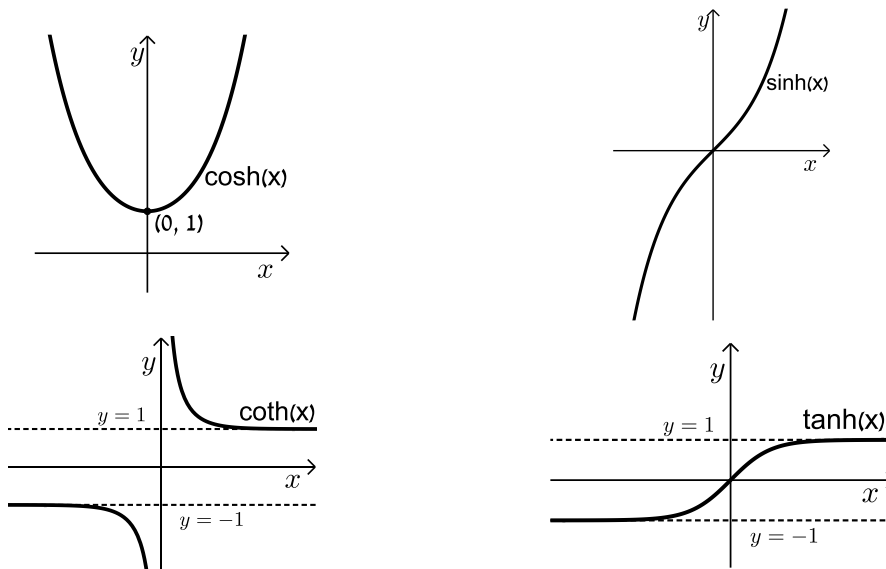
### סיכום כללי

#### הפונקציות ההיפרבוליות

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

#### תיאורים גרפיים



### שאלות

(1) חשבו את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית  $\sinh(x)$ , עבור  $x = 1$ .

(2) נתון כי  $\sinh(x_0) = -1$ .

חשבו את ערכן של הפונקציות  $\cosh(x_0)$ ,  $\tanh(x_0)$  ו- $\coth(x_0)$ .

(3) חשבו  $\sinh(\ln 5)$ .

(4) חשבו  $\tanh(-3 \ln 2)$ .

## תשובות סופיות

(1) 1.175

$$\cosh(x_0) = \sqrt{2}, \quad \tanh(x_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \coth(x_0) = -\sqrt{2} \quad (2)$$

(3) 2.4

(4)  $-\frac{63}{65}$

## זהויות עם פונקציות היפרבוליות

### סיכום כללי

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות

| סינוס וקוסינוס<br>היפרבוליים        | טנגנס וקוטנגנס<br>היפרבוליים            | ארגומנט שלילי           |
|-------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------|
| $\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$ | $1 + \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ | $\cosh(-x) = \cosh(x)$  |
| $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$       | $\coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$ | $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ |

### סכום והפרש ארגומנטים

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$$

### זהויות של ארגומנט כפול

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2 \sinh^2(x) + 1 = 2 \cosh^2(x) - 1$$

### שאלות

(1) הוכיחו את הזהות  $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$ .

(2) הוכיחו את הזהות הכפולה  $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$

בתחום  $x \geq 0$ .

(3) הוכיחו את הזהות  $\cosh^4(x) - \sinh^4(x) = \cosh(2x)$ .

(4) הוכיחו את הזהויות  $\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נגזרות של פונקציות היפרבוליות

### סיכום כללי

הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות

|                          |                                       |
|--------------------------|---------------------------------------|
| $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ | $(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$  |
| $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ | $(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$ |

### שאלות

1 גזרו את הפונקציה  $f(x) = \cosh(\ln x)$ .

2 גזרו את הפונקציה  $f(x) = \sinh(\tanh(x))$ .

3 גזרו את הפונקציה  $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$ .

4 גזרו את הפונקציה  $f(x) = \sinh^2(x^3)$ .

### תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{\sinh(\ln x)}{x} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)} \quad (2)$$

$$f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x) \quad (3)$$

$$f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3) \quad (4)$$

## הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

### סיכום כללי

#### הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

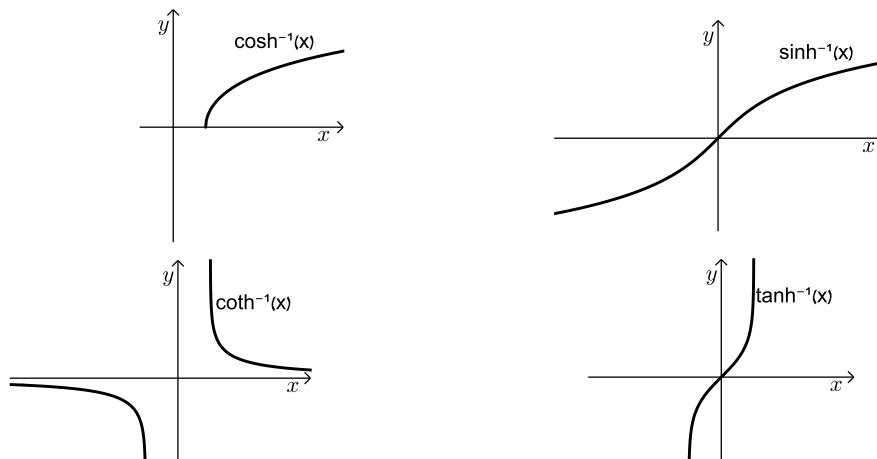
$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

#### תיאורים גרפיים



#### הערה

קיים גם סימון של פונקציה הפוכה עם  $\operatorname{arc}$ , למשל  $\sinh^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$ .

#### שאלות

(1) הוכיחו כי  $\sinh(\operatorname{arc} \cosh(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ , לכל  $|x| > 1$ .

(2) הוכיחו כי  $\cosh(\operatorname{arc} \tanh(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , לכל  $|x| < 1$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

### סיכום כללי

הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות

|                                                    |                                               |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $(\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$        | $(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2},  x  < 1$ |
| $(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$ | $(\coth^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2},  x  > 1$ |

### שאלות

- 1 גזרו את הפונקציה  $f(x) = \ln(\operatorname{arcsinh}(x))$ .
- 2 גזרו את הפונקציה  $f(x) = \ln(\cosh(\operatorname{arctanh}(x)))$ .
- 3 גזרו את הפונקציה  $f(x) = \operatorname{arcsinh}(\operatorname{arcosh}(\tan(x)))$ .

### תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(\cosh^{-1}(\tan x))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad (3)$$