

# חדוא 1

פרק 32 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של עקום.....1
2. הנגזרת ושימושיה.....3
3. שימושי האינטגרל המסוים.....4
- 4.....

## הצגה פרמטרית של עקום

### שאלות

(1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א.  $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב.  $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג.  $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א.  $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב.  $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג.  $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר  $t$ , מצאו משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים  $x$  ו- $y$  בלבד:

א.  $x = t - 4, y = t^2$

ב.  $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג.  $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד.  $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה.  $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו.  $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$  ( $k$  קבוע).

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left( \frac{y - 1}{2} \right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

## הנגזרת ושימושיה

### שאלות

(1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$$

הנתונה בצורה פרמטרית.

(2) נתון העקום

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את  $y'(x)$  בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה  $t = -1$ .

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה  $t = -1$ .

(3) נתון העקום

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה  $(0, 0)$ .

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי,

ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של  $t$  העקום קמור/קעור?

### תשובות סופיות

(1)  $y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}$ ,  $y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$

(2) א. ראו בסרטון. ב.  $y' = \frac{-2}{2t+1}$  ג.  $y = 2x + 3$  ד.  $y = -0.5x + 3$

(3) א. ראו בסרטון. ב.  $y = \pm\sqrt{3}x$  ג. אופקי-  $(0, -9)$  אנכי  $(2, -6), (-2, -6)$

ד.  $-1 < t < 1$  קמור.  $t > 1$  או  $t < -1$  קעור.

## שימושי האינטגרל המסוים

(1) חשבו את השטח הכלוא בעקום  $C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$

(2) חשבו את השטח הכלוא בתוך האליפסה  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , כאשר  $a, b > 0$ .

\* שימו לב שאם  $a = b = r$ , נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס  $r$ .

(3) חשבו את השטח הכלוא בין העקום  $0 \leq t \leq \pi$ ,  $x = \cos t$ ,  $y = t + \sin t$  לבין ציר ה- $x$ .

(4) חשבו את השטח הכלוא בין העקום  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $x = 4 \cos t$ ,  $y = \sin^2 t$  לבין ציר ה- $x$ .

(5) חשבו את אורך העקום  $0 \leq t \leq 2\pi$   $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

(6) חשבו את אורך העקום  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$ , מהנקודה  $(1, 0)$  לנקודה  $(-1, \pi)$ .

(7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית  $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$

מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

(8) חלק העקום  $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$  שבין  $t = 0$  לבין  $t = \pi$ , מסתובב סביב ציר ה- $x$ . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

(9) חלק העקום  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  שבין  $t = 0$  לבין  $t = \frac{\pi}{2}$ , מסתובב סביב ציר ה- $y$ . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

(10) חשבו את אורך העקום  $-\pi \leq t \leq 2\pi$   $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$

11) חשבו את אורך העקום  $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$  ,  $1 \leq t \leq 3$ .

### תשובות סופיות

1)  $8/3$

2)  $\pi ab$

3)  $1.5\pi$

4)  $16/3$

5)  $8$

6)  $4$

7) אורך העקום הוא  $2\pi$ . המרחק שעבר החלקיק הוא  $4\pi$ .

8)  $4\pi r^2$

9)  $6\pi/5$

10)  $6\pi\sqrt{29}$

11)  $\sqrt{3}e(e^2 - 1)$