חדוא 1

פרק 50 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של עקום 1
2. הנגזרת ושימושיה 3
3. שימושי האינטגרל המסוים 4

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \ge 0,\ \ x = t^2 + 1,\ \ y = t^2$

ב. $0 \le t \le \pi,\ \ x = \sin t,\ \ y = \cos^2 t$

ג. $\pi \le t \le 2\pi,\ \ x = \cos t,\ \ y = 4\sin t$

2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \le x \le 4,\ \ y = x^4 + 1$

ב. $-2 \le x \le 2,\ \ y = -\sqrt{4 - x^2}$

ג. $-2 \le x \le 2,\ \ y = +\sqrt{4 - x^2}$

3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t, מצאו משוואה מתאימה,
שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4,\ \ y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t,\ \ y = 1 + 2\sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t,\ \ y = 4\sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1,\ \ y = t(0.5t + 1) + 1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2},\ \ y = \frac{20t - 5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t},\ \ y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

1) א. $y = x-1,\ x \ge 1$ ב. $y = 1-x^2, -1 \le x \le 1$

ג. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \le x \le 1, y \le 0$

2) $x = t,\ y = t^4+1,\ 1 \le t \le 4$ ב. $x = 2\cos t\ ,\ y = 2\sin t\ ,\ \pi \le t \le 2\pi$

ג. $x = 2\cos t\ ,\ y = 2\sin t\ ,\ 0 \le t \le \pi$

3) א. $y = (x+4)^2$ ב. $(x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$ ג. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y-1$ ה. $x^2 + y^2 = 25$ ו. $x^2 - y^2 = 4k^2$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה $\begin{cases} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=t\cos t \end{cases}$, הנתונה בצורה פרמטרית.

2) נתון העקום $\begin{cases} x=t^2+t \\ y=1-2t \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t=-1$.

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t=-1$.

3) נתון העקום $\begin{cases} x=t^3-3t \\ y=3t^2-9 \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0,0)$.

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי,
ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

1) $y''=\frac{(-t\cos t-2\sin t)(1-\cos t)-\sin t(\cos t-t\sin t)}{(1-\cos t)^3}$, $y'=\frac{\cos t-\sin t\cdot t}{1-\cos t}$

2) א. ראו בסרטון. ב. $y'=\frac{-2}{2t+1}$ ג. $y=2x+3$ ד. $y=-0.5x+3$

3) א. ראו בסרטון. ב. $y=\pm\sqrt{3}x$ ג. אופקי- $(0,-9)$ אנכי $(-2,-6),(2,-6)$

ד. $-1<t<1$ קמור. $t>1$ או $t<-1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

1) חשבון את השטח הכלוא בעקום $C:\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=\sin 4t\end{cases}$.

2) חשבון את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $a,b>0$.

* שימו לב שאם $a=b=r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r.

3) חשבון את השטח הכלוא בין העקום $y=t+\sin t,\quad x=\cos t,\quad 0\le t\le\pi$
לבין ציר ה- x.

4) חשבון את השטח הכלוא בין העקום $y=\sin^2 t,\quad x=4\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi$
לבין ציר ה- x.

5) חשבון את אורך העקום $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

6) חשבון את אורך העקום $\begin{cases}x=\cos t\\ y=t+\sin t\end{cases}$, מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,\pi)$.

7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית
$\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=\sin 2t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$
מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

8) חלק העקום $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\pi$, מסתובב סביב ציר ה- x.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

9) חלק העקום $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

10) חשבון את אורך העקום $-\pi\le t\le 2\pi$ $\begin{cases}x=4\sin t\\ y=10t\\ z=4\cos t\end{cases}$.

11) חשבו את אורך העקום $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\cos t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t\right)\mathbf{j}+\left(e^t\right)\mathbf{k}$, $1\le t\le 3$.

תשובות סופיות

1) $8/3$

2) πab

3) 1.5π

4) $16/3$

5) 8

6) 4

7) אורך העקום הוא 2π. המרחק שעבר החלקיק הוא 4π.

8) $4\pi r^2$

9) $6\pi/5$

10) $6\pi\sqrt{29}$

11) $\sqrt{3}e\left(e^2-1\right)$