

# מתמטיקה ב

פרק 4 - נוסחת הקירוב הלינארי

תוכן העניינים

1. בעיות משיקים..... 1
2. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק..... 3
3. הנורמל..... 7
4. זווית שבין שתי עקומות..... 8

## בעיות משיקים

### שאלות

(1) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ . מצאו את  $a$  ו- $c$ .

(4) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6)  $(2, -3)$ ,  $y = x^2 - 2x + 1$

(7)  $(-3, 1)$ ,  $y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(9) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו. מצאו את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

**(10)** נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$ .

א. הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = x^2 f(3x-2)$  גזירה לכל  $x$ .

ב. הישר  $2y = 10x + 11$  משיק לגרף הפונקציה  $z(x)$  בנקודה  $x = -1$ .

מצאו את השיפוע של  $f(x)$  בנקודה  $x = -5$ .

### תשובות סופיות

**(1)** נקודת ההשקה היא  $(-1, 5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .

**(2)** נקודת ההשקה היא  $(4, 12)$  ו-  $b = 4$ .

**(3)** נקודת ההשקה היא  $(0, \frac{1}{2})$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .

**(4)** נקודת ההשקה היא  $(0, 1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .

**(5)** משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .

**(6)**  $y = 6x - 15, (4, 9)$  ;  $y = -2x + 1, (0, 1)$

**(7)** המשיק  $(9, 3)$ ,  $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .

**(8)**  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

**(9)** נקודת ההשקה  $(1, 1)$ ,  $k = 1.5$ .

**(10)** א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

## בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

### שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  , בנקודה  $x = -1$  .

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  , ששיפועו 2 .

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  , בנקודה  $x = 0$  .

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  , בנקודה  $x_1 = 1$  .

(5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  , בנקודה  $y = 2$  , הוא -4 .  
מצאו את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  , היוצרים זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  , ששיפועו -2 .

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  , בנקודה  $x_1 = 2$  .

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  , בנקודה  $(1,6)$  , הוא -6 .  
מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה  $y = e^{2x} + 3ex$  , והעבירו לה משיק בנקודה  $x = 2$  .  
מצאו את משוואת המשיק.

**(11)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ , בנקודה  $x = 0$ .

**(12)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ , בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .

**(13)** לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ . מצאו את משוואת המשיק.

**(14)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$ , בנקודה  $x = 1$ .

**(15)** הגרפים של  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - x$  נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

**(16)** מצאו את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .

**(17)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה  $(1, 1)$ .

**(18)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(19)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2y = xy^2$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(20)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{-y^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה  $(0, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(21)** נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (18)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (19)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (20)$$

$$(21) \quad \text{א. } (0,0), (1,0) \quad \text{ב. בראשית הצירים: } y = -x, \text{ המשוואה השנייה: } y = x - 1.$$

## הנורמל

### שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2x-2}$ , בנקודה  $(3,2)$ .
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות  $(5,0)$  ו- $(2,4)$ .
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , בנקודה מסוימת, היא  $4y + x = 6$ . מצאו את הנקודה.

### תשובות סופיות

- (1)  $y = -2x + 8$
- (2)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3)  $(2,1)$

## זווית שבין שתי עקומות

### שאלות

(1) מצאו את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .

(2) מצאו את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .

(3) הוכיחו שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

### תשובות סופיות

(1)  $71.57^\circ$

(2)  $71.56^\circ$

(3) שאלת הוכחה.