

קומבינטוריקה

פרק 4 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

תוכן העניינים

1. נוסחאות נסיגה (רקורסיה).....1

נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

שאלות

- (1) לכל n שלם אי-שלילי נגדיר את a_n להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל- n , כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3. כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n . דוגמאות:
- הסדרה (1,5,9,12) נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
 - הסדרה (14) נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
 - הסדרה (1,7,9,12) אינה נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.
- (2) א. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת n אנשים לזוגות ולבודדים.
 ב. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של n אנשים לזוגות ולשלשות, כאשר הסדר בין הזוגות והשלשות ו**בתוך** הזוגות והשלשות אינו משנה.
- (3) בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע. יהי a_n מספר ערימות קלפי טאקי בגודל n , שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- a_n .

4 מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך n מעל $\{A, B, C\}$ ללא הרצף:

א. CC

ב. AB

ג. AA, AB

ד. AA, BA

ה. AA, AB, AC

ו. AB, BC (פתרו בשתי דרכים)

ז. BA, CA

ח. AA, BB

ט. AA, BB, CC

י. BC, CB

5 מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך n במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת. לאחר מכן פתרו את יחס הנסיגה שהתקבל, קבלו נוסחה מפורשת, וחשבו את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים: אחת לפי היחס הרקורסיבי ושנייה על ידי הצבה בנוסחה המפורשת שנמצאה.

6 עבור n טבעי, מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך n מעל קבוצת הספרות העשרונית $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$?

(סדרה x_1, \dots, x_n היא פלינדרומית, אם $x_i = x_{n-i+1}$ לכל $1 \leq i \leq n$.)

ובעברית פשוטה: אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה, למשל (1, 7, 2, 2, 2, 7, 1).

- 7) נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים: הספרות 0 ו-1, וארבעה סימני פעולה +, -, *, /. ובכפוף לתנאים הבאים:
1. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.
 2. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.
- דוגמאות של סדרות העונות על התנאים: $0100/101 - 11 + 1010$, 001 .
- דוגמאות של סדרות שאינן עונות על התנאים: -00 , $+00+10$, $101+/00$.
- נסמן ב- a_n את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק n סימנים.
- א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n .
 - ב. מצאו באופן ישיר את a_0, a_1, a_2, a_3 , ובדקו בעזרת הערכים שהתקבלו את יחס הנסיגה שרשמתם.
 - ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n .
- בדקו בעזרת הנוסחה את תוצאות סעיף ב.

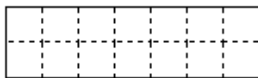


8) בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 .

עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$ (בציור להלן $n = 7$).
אסור לחרוג מגבולות המלבן.



בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו, 'שוכב' או 'עומד'.
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

- א. רשמו יחס נסיגה עבור a_n (הסבירו אותו) ותנאי התחלה מספיקים.
- ב. פתרו את יחס הנסיגה.
- ג. חשבו את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א' ובאופן ישיר.

9) תנו ביטוי מפורש ל- a_n בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את a_3, a_4, a_5 בשתי דרכים: בעזרת יחס הנסיגה ובעזרת הנוסחה המפורשת.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| א. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ | כאשר $a_0 = 3, a_1 = 7$ |
| ב. $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 1$ |
| ג. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ | כאשר $a_0 = -1, a_1 = 4$ |
| ד. $a_{n+1} = 7a_{n-1} + 6a_{n-2}$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 7$ |
| ה. $a_{n+1} = 4a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2}$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 11$ |
| ו. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$ | כאשר $a_1 = 19, a_0 = 14$ |
| ז. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 9$ |
| ח. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3^n$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 9$ |
| ט. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 2^n$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 10$ |
| י. $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 5^n$ | כאשר $a_0 = -1, a_1 = 7\frac{1}{2}$ |
| יא. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + n$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 2$ |

10) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה a_n המקיימת:

$$a_n = 2^{2n+1} - 3^n (n-1) + 1$$

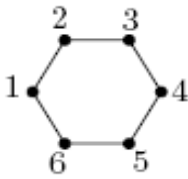
11) כתבו נוסחת נסיגה למספר הסדרות באורך n בספרות 0,1,2 ללא 00 ו-12.

12) איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר, 4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב, הוא לא לוקח שוחד על סך 6 מיליון דולר שנתיים ברצף. נסמן ב- a_n את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן n שנים. דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2; את סדרת השוחד 2,4,2,6; את סדרת השוחד 4,2,2,6; וכן הלאה (שימו לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות). רשמו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- a_n .

13) לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן על ידי a_n את מספר המילים מעל $\{A, B, C, D, E\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים AA, BA, CA . מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n .

14 יהי a_n מספר הסדרות באורך n שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ומקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

- א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n , ורשמו את a_1 ו- a_0 .
- ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n .
- ג. חשבו את a_2 מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.



15 כמה טיולים באורך n , המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף הבא?
 לדוגמה: עבור $n = 2$ יש שני טיולים כאלה והם 1, 2, 1 ו-1, 6, 1.
 לדוגמה: עבור $n = 4$ יש שישה טיולים כאלה והם
 $(1, 2, 1, 6, 1), (1, 6, 1, 2, 1), (1, 6, 1, 6, 1), (1, 6, 5, 6, 1), (1, 2, 1, 2, 1), (1, 2, 3, 2, 1)$

16 נתון כי n הוא חזקה טבעית של 4, $f(n) = 16f\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$ וכן $f(1) = 3$.
 פתרו בשיטת הצבה חוזרת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il