

# מתמטיקה דיסקרטית

פרק 10 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

תוכן העניינים

1. נוסחאות נסיגה (רקורסיה).....1

## נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

### שאלות

- (1) לכל  $n$  שלם אי-שלילי נגדיר את  $a_n$  להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל- $n$ , כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3. כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל  $a_n$ . דוגמאות:
- הסדרה (1,5,9,12) נספרת בחישוב של  $a_{14}$ , מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
  - הסדרה (14) נספרת בחישוב של  $a_{14}$ , מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
  - הסדרה (1,7,9,12) אינה נספרת בחישוב של  $a_{14}$ , מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.
- (2) א. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת  $n$  אנשים לזוגות ולבודדים.  
 ב. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של  $n$  אנשים לזוגות ולשלשות, כאשר הסדר בין הזוגות והשלשות ו**בתוך** הזוגות והשלשות אינו משנה.
- (3) בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע. יהי  $a_n$  מספר ערימות קלפי טאקי בגודל  $n$ , שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- $a_n$ .

4 מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך  $n$  מעל  $\{A, B, C\}$  ללא הרצף:

א.  $CC$

ב.  $AB$

ג.  $AA, AB$

ד.  $AA, BA$

ה.  $AA, AB, AC$

ו.  $AB, BC$  (פתרו בשתי דרכים)

ז.  $BA, CA$

ח.  $AA, BB$

ט.  $AA, BB, CC$

י.  $BC, CB$

5 מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך  $n$  במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת. לאחר מכן פתרו את יחס הנסיגה שהתקבל, קבלו נוסחה מפורשת, וחשבו את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים: אחת לפי היחס הרקורסיבי ושנייה על ידי הצבה בנוסחה המפורשת שנמצאה.

6 עבור  $n$  טבעי, מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך  $n$  מעל קבוצת הספרות העשרוניות  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ?

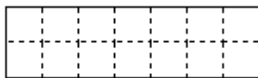
(סדרה  $x_1, \dots, x_n$  היא פלינדרומית, אם  $x_i = x_{n-i+1}$  לכל  $1 \leq i \leq n$ .)

ובעברית פשוטה: אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה, למשל (1, 7, 2, 2, 2, 7, 1).

- 7** נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים: הספרות 0 ו-1, וארבעה סימני פעולה +, -, \*, /. ובכפוף לתנאים הבאים:
1. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.
  2. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.
- דוגמאות של סדרות העונות על התנאים:  $0100/101 - 11 + 1010$ ,  $001$ .
- דוגמאות של סדרות שאינן עונות על התנאים:  $101 + /00$ ,  $+00 + 10$ ,  $-00$ .
- נסמן ב- $a_n$  את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק  $n$  סימנים.
- א. מצאו יחס נסיגה עבור  $a_n$ .
  - ב. מצאו באופן ישיר את  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , ובדקו בעזרת הערכים שהתקבלו את יחס הנסיגה שרשמתם.
  - ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור  $a_n$ .
- בדקו בעזרת הנוסחה את תוצאות סעיף ב.



- 8** בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל  $2 \times 1$  ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל  $2 \times 2$ . עלינו לרצף מלבן שממדיו  $n \times 2$  (בציור להלן  $n = 7$ ). אסור לחרוג מגבולות המלבן.



בלוק של  $2 \times 1$  אפשר להניח כרצוננו, 'שוכב' או 'עומד'. יהי  $a_n$  מספר הריצופים השונים האפשריים.

- א. רשמו יחס נסיגה עבור  $a_n$  (הסבירו אותו) ותנאי התחלה מספיקים.
- ב. פתרו את יחס הנסיגה.
- ג. חשבו את  $a_4$  בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א' ובאופן ישיר.

9) תנו ביטוי מפורש ל- $a_n$  בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את  $a_3, a_4, a_5$  בשתי דרכים: בעזרת יחס הנסיגה ובעזרת הנוסחה המפורשת.

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| א. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$            | כאשר $a_0 = 3, a_1 = 7$             |
| ב. $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$            | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 1$             |
| ג. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$            | כאשר $a_0 = -1, a_1 = 4$            |
| ד. $a_{n+1} = 7a_{n-1} + 6a_{n-2}$        | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 7$    |
| ה. $a_{n+1} = 4a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2}$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 11$   |
| ו. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$     | כאשר $a_1 = 19, a_0 = 14$           |
| ז. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3$        | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 9$             |
| ח. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3^n$      | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 9$             |
| ט. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 2^n$      | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 10$            |
| י. $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 5^n$    | כאשר $a_0 = -1, a_1 = 7\frac{1}{2}$ |
| יא. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + n$ | כאשר $a_0 = 1, a_1 = 2$             |

10) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה  $a_n$  המקיימת:

$$a_n = 2^{2n+1} - 3^n (n-1) + 1$$

11) כתבו נוסחת נסיגה למספר הסדרות באורך  $n$  בספרות 0,1,2 ללא 00 ו-12.

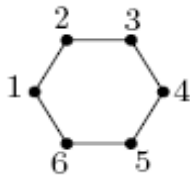
12) איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר, 4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב, הוא לא לוקח שוחד על סך 6 מיליון דולר שנתיים ברצף. נסמן ב- $a_n$  את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן  $n$  שנים. דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2; את סדרת השוחד 2,4,2,6; את סדרת השוחד 4,2,2,6; וכן הלאה (שימו לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות). רשמו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- $a_n$ .

13) לכל  $n \in \mathbb{N}$  נסמן על ידי  $a_n$  את מספר המילים מעל  $\{A, B, C, D, E\}$  שלא מכילות

- אף אחד מהרצפים  $AA, BA, CA$ .  
מצאו נוסחה מפורשת עבור  $a_n$ .

**14** יהי  $a_n$  מספר הסדרות באורך  $n$  שאיבריהן שייכים לקבוצה  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$  ומקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

- א. מצאו יחס נסיגה עבור  $a_n$ , ורשמו את  $a_1$  ו- $a_0$ .
- ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור  $a_n$ .
- ג. חשבו את  $a_2$  מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.



**15** כמה טיולים באורך  $n$ , המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף הבא?  
 לדוגמה: עבור  $n = 2$  יש שני טיולים כאלה והם 1, 2, 1 ו-1, 6, 1.  
 לדוגמה: עבור  $n = 4$  יש שישה טיולים כאלה והם  
 $(1, 2, 1, 6, 1), (1, 6, 1, 2, 1), (1, 6, 1, 6, 1), (1, 6, 5, 6, 1), (1, 2, 1, 2, 1), (1, 2, 3, 2, 1)$

**16** נתון כי  $n$  הוא חזקה טבעית של 4,  $f(n) = 16f\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$ , וכן  $f(1) = 3$ .  
 פתרו בשיטת הצבה חוזרת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)