מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים

פרק 5 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

תוכן העניינים

נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

שאלות

1) לכל n שלם אי-שלילי נגדיר את a_n להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל- n, כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3.
כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n.
דוגמאות:
- הסדרה (12,9,5,1) נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
- הסדרה (14) נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
- הסדרה (12,9,7,1) אינה נספרת בחישוב של a_{14}, מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.

2) א. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת n אנשים לזוגות ולבודדים.
ב. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של n אנשים לזוגות ולשלשות, כאשר הסדר <u>בין</u> הזוגות והשלשות ו<u>בתוך</u> הזוגות והשלשות אינו משנה.

3) בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע.
יהי a_n מספר ערימות קלפי טאקי בגודל n, שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק.
מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- a_n.

4) מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך n מעל $\{A,B,C\}$ ללא הרצף:

א. CC

ב. AB

ג. AA, AB

ד. AA, BA

ה. AA, AB, AC

ו. AB, BC (פתרו בשתי דרכים)

ז. BA, CA

ח. AA, BB

ט. AA, BB, CC

י. BC, CB

5) מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך n במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת.
לאחר מכן פתרו את יחס הנסיגה שהתקבל, קבלו נוסחה מפורשת, וחשבו את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים: אחת לפי היחס הרקורסיבי ושנייה על ידי הצבה בנוסחה המפורשת שנמצאה.

6) עבור n טבעי, מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך n מעל קבוצת הספרות העשרוניות $\{0,1,2,...,9\}$?
(סדרה $x_1,...,x_n$ היא פלינדרומית, אם $x_i = x_{n-i+1}$ לכל $1 \le i \le n$.
ובעברית פשוטה: אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה, למשל $1,7,2,2,2,7,1$).

7) נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים: הספרות 0 ו-1, וארבעה סימני פעולה $+,-,*,/$, ובכפוף לתנאים הבאים:

1. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.
2. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.

דוגמאות של סדרות העונות על התנאים: $0100/101-11+1010$, 001.

דוגמאות של סדרות **<u>שאינן</u>** עונות על התנאים: -00, $+00+10$, $101+/00$.

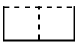
נסמן ב- a_n את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק n סימנים.

א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n.

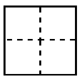
ב. מצאו באופן ישיר את a_0, a_1, a_2, a_3, ובדקו בעזרת הערכים שהתקבלו את יחס הנסיגה שרשמתם.

ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n.
בדקו בעזרת הנוסחה את תוצאות סעיף ב.

8) בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1

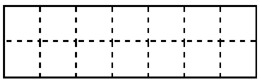


ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2.



עלינו לרצף מלבן שממדיו $2\times n$ (בציור להלן $n=7$).

אסור לחרוג מגבולות המלבן.



בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו, 'שוכב' או 'עומד'.

יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

א. רשמו יחס נסיגה עבור a_n (הסבירו אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

ב. פתרו את יחס הנסיגה.

ג. חשבו את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א' ובאופן ישיר.

9) תנו ביטוי מפורש ל- a_n בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את a_3 , a_4 , a_5 בשתי דרכים : בעזרת יחס הנסיגה ובעזרת הנוסחה המפורשת.

א. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 3$, $a_1 = 7$.

ב. $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

ג. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, כאשר $a_0 = -1$, $a_1 = 4$.

ד. $a_{n+1} = 7a_{n-1} + 6a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 7$.

ה. $a_{n+1} = 4a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 11$.

ו. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$, כאשר $a_1 = 19$, $a_0 = 14$.

ז. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 9$.

ח. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3^n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 9$.

ט. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 2^n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 10$.

י. $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 5^n$, כאשר $a_0 = -1$, $a_1 = 7\frac{1}{2}$.

יא. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + n$, כאשר $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

10) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה a_n המקיימת :
$a_n = 2^{2n+1} - 3^n(n-1) + 1$.

11) כתבו נוסחת נסיגה למספר הסדרות באורך n בספרות $0,1,2$ ללא 00 ו-12.

12) איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר, 4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב, הוא לא לוקח שוחד על סך 6 מיליון דולר שנתיים ברצף. נסמן ב- a_n את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן n שנים.
דוגמה : במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2 ; את סדרת השוחד 2,4,2,6 ; את סדרת השוחד 4,2,2,6 ; וכן הלאה (שימו לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות).
רשמו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- a_n .

13) לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן על ידי a_n את מספר המילים מעל $\{A, B, C, D, E\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים AA, BA, CA .
מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n .

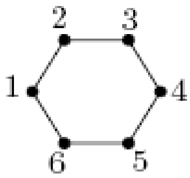
14) יהי a_n מספר הסדרות באורך n שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,3\ldots,8\}$ ומקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n, ורשמו את a_1 ו- a_0.

ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n.

ג. חשבו את a_2 מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.

15) כמה טיולים באורך n, המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף הבא?



לדוגמה: עבור $n=2$ יש שני טיולים כאלה והם $1,2,1$ ו- $1,6,1$.

לדוגמה: עבור $n=4$ יש שישה טיולים כאלה והם

$(1,2,1,6,1),(1,6,1,2,1),(1,6,1,6,1),(1,6,5,6,1),(1,2,1,2,1).(1,2,3,2,1)$

16) נתון כי n הוא חזקה טבעית של 4, $f(n)=16f\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$ וכן $f(1)=3$.

פתרו בשיטת הצבה חוזרת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il