# מבוא למתמטיקה דיסקרטית

## פרק 10 - נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

### תוכן העניינים

1. נוסחאות נסיגה (רקורסיה) ..... 1

# נוסחאות נסיגה (רקורסיה)

## שאלות

**1)** לכל $n$ שלם אי-שלילי נגדיר את $a_n$ להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל- $n$, כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3.
כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל $a_n$.
דוגמאות:
- הסדרה (12,9,5,1) נספרת בחישוב של $a_{14}$, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
- הסדרה (14) נספרת בחישוב של $a_{14}$, מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל-14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
- הסדרה (12,9,7,1) אינה נספרת בחישוב של $a_{14}$, מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.

**2)** א. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת $n$ אנשים לזוגות ולבודדים.
ב. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של $n$ אנשים לזוגות ולשלשות, כאשר הסדר <u>בין</u> הזוגות והשלשות <u>ובתוך</u> הזוגות והשלשות אינו משנה.

**3)** בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע.
יהי $a_n$ מספר ערימות קלפי טאקי בגודל $n$, שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק.
מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- $a_n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

**4)** מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך $n$ מעל $\{A,B,C\}$ ללא הרצף:

א. $CC$

ב. $AB$

ג. $AA, AB$

ד. $AA, BA$

ה. $AA, AB, AC$

ו. $AB, BC$ (פתרו בשתי דרכים)

ז. $BA, CA$

ח. $AA, BB$

ט. $AA, BB, CC$

י. $BC, CB$

**5)** מצאו יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך $n$ במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת.
לאחר מכן פתרו את יחס הנסיגה שהתקבל, קבלו נוסחה מפורשת, וחשבו את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים: אחת לפי היחס הרקורסיבי ושנייה על ידי הצבה בנוסחה המפורשת שנמצאה.

**6)** עבור $n$ טבעי, מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך $n$ מעל קבוצת הספרות העשרוניות $\{0,1,2,...,9\}$?
(סדרה $x_1,...,x_n$ היא פלינדרומית, אם $x_i = x_{n-i+1}$ לכל $1 \le i \le n$.
ובעברית פשוטה: אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה, למשל $1,7,2,2,2,7,1$).


כתב ופתר – טל פלדמן ©

**7)** נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים: הספרות 0 ו-1, וארבעה סימני פעולה $+,-,*,/$, ובכפוף לתנאים הבאים:

1. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.
2. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.

דוגמאות של סדרות העונות על התנאים: $001$ , $0100/101-11+1010$.

דוגמאות של סדרות **שאינן** עונות על התנאים: $101+/00$ , $+00+10$ , $-00$.

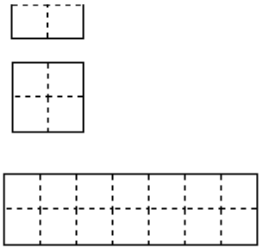
נסמן ב- $a_n$ את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק $n$ סימנים.

א. מצאו יחס נסיגה עבור $a_n$.

ב. מצאו באופן ישיר את $a_0, a_1, a_2, a_3$, ובדקו בעזרת הערכים שהתקבלו את יחס הנסיגה שרשמתם.

ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור $a_n$.
בדקו בעזרת הנוסחה את תוצאות סעיף ב.

**8)** בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל $2\times1$
ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל $2\times2$.
עלינו לרצף מלבן שממדיו $n\times2$ (בציור להלן $n=7$).
אסור לחרוג מגבולות המלבן.
בלוק של $2\times1$ אפשר להניח כרצוננו, 'שוכב' או 'עומד'.
יהי $a_n$ מספר הריצופים השונים האפשריים.



א. רשמו יחס נסיגה עבור $a_n$ (הסבירו אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

ב. פתרו את יחס הנסיגה.

ג. חשבו את $a_4$ בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א' ובאופן ישיר.


כתב ופתר – טל פלדמן ©

**9)** תנו ביטוי מפורש ל- $a_n$ בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את $a_3$ , $a_4$ , $a_5$ בשתי דרכים: בעזרת יחס הנסיגה ובעזרת הנוסחה המפורשת.

א. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 3$ , $a_1 = 7$.

ב. $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$, כאשר $a_0 = 1$ , $a_1 = 1$.

ג. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, כאשר $a_0 = -1$ , $a_1 = 4$.

ד. $a_{n+1} = 7a_{n-1} + 6a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 1$ , $a_1 = 0$ , $a_2 = 7$.

ה. $a_{n+1} = 4a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2}$, כאשר $a_0 = 1$ , $a_1 = 4$ , $a_2 = 11$.

ו. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$, כאשר $a_0 = 14$ , $a_1 = 19$.

ז. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3$, כאשר $a_0 = 1$ , $a_1 = 9$.

ח. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3^n$, כאשר $a_0 = 1$ , $a_1 = 9$.

ט. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 2^n$, כאשר $a_0 = 1$ , $a_1 = 10$.

י. $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 5^n$, כאשר $a_0 = -1$ , $a_1 = 7\frac{1}{2}$.

יא. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + n$, כאשר $a_0 = 1$ , $a_1 = 2$.

**10)** מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה $a_n$ המקיימת:
$a_n = 2^{2n+1} - 3^n(n-1) + 1$.

**11)** כתבו נוסחת נסיגה למספר הסדרות באורך $n$ בספרות $0,1,2$ ללא 00 ו-12.

**12)** איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר, 4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב, הוא לא לוקח שוחד על סך 6 מיליון דולר שנתיים ברצף. נסמן ב- $a_n$ את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן $n$ שנים.
דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2; את סדרת השוחד 2,4,2,6; את סדרת השוחד 4,2,2,6; וכן הלאה (שימו לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות).
רשמו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל- $a_n$.

**13)** לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן על ידי $a_n$ את מספר המילים מעל $\{A,B,C,D,E\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים $AA, BA, CA$.
מצאו נוסחה מפורשת עבור $a_n$.


כתב ופתר – טל פלדמן ©

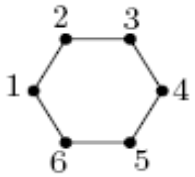
**14)** יהי $a_n$ מספר הסדרות באורך $n$ שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,3\ldots,8\}$ ומקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

א. מצאו יחס נסיגה עבור $a_n$, ורשמו את $a_1$ ו-$a_0$.

ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור $a_n$.

ג. חשבו את $a_2$ מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.

**15)** כמה טיולים באורך $n$, המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף הבא?




לדוגמה: עבור $n=2$ יש שני טיולים כאלה והם $1,2,1$ ו-$1,6,1$.

לדוגמה: עבור $n=4$ יש שישה טיולים כאלה והם $(1,2,3,2,1)$.$(1,2,1,2,1)$, $(1,6,5,6,1)$, $(1,6,1,6,1)$, $(1,6,1,2,1)$, $(1,2,1,6,1)$

**16)** נתון כי $n$ הוא חזקה טבעית של 4, $f(n)=16f\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$ וכן $f(1)=3$.

פתרו בשיטת הצבה חוזרת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – טל פלדמן ©