מתמטיקה לכלכלנים ב'

פרק 6 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 1

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3,4)$.

2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

5) תהי $f(x,y)=xy^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

6) תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f , בנקודה $(2,1,4)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y), נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$, בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-y.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.

מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, ו-$60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-z.

הניחו שהזווית עם ציר ה-y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q, בכיוון וקטור שיוצר זווית $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש-$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש-$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

15) הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה (x,y,z).

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x,y,z), בהן הטמפרטורה שווה $20°$, מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

16) גֶּלָה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
שחררו את הגֶּלָה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֶּלָה.

17) תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f\left(x,x^2\right)=\dfrac{x^2}{2}+x^4$ לכל x.

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1,1)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.

חשבו את $\nabla f(0,2,4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

ד. באיזה כיוון α, הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית?
מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0\\ 21y & x=0\end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

הערות סימון

1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{j}=(0,1)$, $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:
$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.
למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}\Leftrightarrow\vec{u}=(3,4)$.
במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$,
ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.
למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(3,4,5)$.

2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

3) וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ **3)** $\frac{1}{2}$ **4)** $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ **6)** $\frac{88}{3}$ **7)** $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$

ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.

ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

18) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

19) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$

ד. $Max\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}},\ \alpha=54.73^\circ$

20) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=(21/29,-20,29)$ (יש אחרים).