# חדוא 2

## פרק 11 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

### תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט ..... 1

# נגזרת מכוונת וגרדיאנט

## שאלות

**1)** תהי $f(x,y)=x^2+y^2$ .

א. חשבו את הגרדיאנט של $f$ ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של $f$ , העובר דרך $(3,4)$.

**2)** תהי $f(x,y)=3x^2y$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ .

**3)** תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ .

**4)** תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של $45^\circ$ עם החלק החיובי של ציר ה- $x$ .

**5)** תהי $f(x,y)=xy^2$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

**6)** תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של $f$ , בנקודה $(2,1,4)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$ .

**7)** אם הפוטנציאל החשמלי $V$ בנקודה $(x,y)$, נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

**8)** מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$, בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

**10)** אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

**11)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$.

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$y$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

**12)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.

מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$, ו-$60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$z$.

הניחו שהזווית עם ציר ה-$y$ חדה.

**13)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה $Q$, בכיוון וקטור שיוצר זווית $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$.

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש-$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש-$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f$ בנקודה $(0,0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

**15)** הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה $(x,y,z)$.

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות $(x,y,z)$, בהן הטמפרטורה שווה $20°$, מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

**16)** גֶּלָה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
שחררו את הגֶּלָה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֶּלָה.

**17)** תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f\left(x,x^2\right)=\frac{x^2}{2}+x^4$ לכל $x$.

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$, שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של $f$ בנקודה $(1,1)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.

חשבו את $\nabla f(0,2,4)$.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית $\alpha$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$.

ד. באיזה כיוון $\alpha$, הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית?
מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

**20)** נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0\\ 21y & x=0\end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של $m$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

**הערות סימון**

**1)** במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{j}=(0,1)$ , $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:
$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.
למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}\ \Leftrightarrow\ \vec{u}=(3,4)$.
במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$ , $\mathbf{j}=(0,1,0)$ , $\mathbf{i}=(1,0,0)$,
ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.
למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k}\ \Leftrightarrow\ \vec{u}=(3,4,5)$.

**2)** יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

**3)** וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

**2)** $\frac{48}{5}$ **3)** $\frac{1}{2}$ **4)** $7.5\sqrt{2}$

**5)** $3\sqrt{13}$ **6)** $\frac{88}{3}$ **7)** $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

**8)** הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

**9)** הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

**10)** בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

**11)** א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

**12)** $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

**13)** א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

**14)** א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$

ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

**15)** א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.

ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

**16)** א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

**17)** $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

**18)** $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

**19)** א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$

ד. $Max\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}},\ \alpha=54.73^\circ$

**20)** א. $m>29$ ב. $\hat{u}=(21/29,-20,29)$ (יש אחרים).