אנליזה מודרנית

פרק 6 - נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות

תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון 1
2. נגזרות חלקיות מסדר שני 3
3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה 7
4. דיפרנציאבילית 9

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin(xy)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

11) נתון $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

12) נתון $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\ \ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = \cos(xy)\cdot y$ $\quad f_y = \cos(xy)\cdot x$

7) $f_x = \dfrac{2}{1 + (2x + 3y)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{3}{1 + (2x + 3y)^2}$

8) $f_r = \cos\theta$ $\quad f_\theta = -r\sin\theta$

9) $f_x = y^2z^3$ $\quad f_y = 2xyz^3$ $\quad f_z = 3xy^2z^2$

10) $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $\quad f_v = u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $\quad f_t = u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

11) שאלת הוכחה.

12) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = 4$

הערת סימון

$$f = f(x,y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{21} \end{array}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

14) $f(x,y,z)=xyz$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

17) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

18) נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשבו $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

(1) $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ $\quad f_{xx} = 8 - 2y^2$ $\quad f_y = -2x^2y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$ $\quad f_{xy} = -4xy$ $\quad f_{yx} = -4xy$

(2) $f_x = 4x^3 \ln y$ $\quad f_{xx} = 12x^2 \ln y$ $\quad f_y = \frac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$ $\quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$ $\quad f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

(3) $f_x = 3x^2 - 6y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$ $\quad f_{xy} = 6$ $\quad f_{yx} = -6$

(4) $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$ $\quad f_{xy} = -3$

(5) $f_x = 2xy - y^2$ $\quad f_{xx} = 2y$ $\quad f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

(6) $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{yy} = 2\left[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0\right]$ $\quad f_{xx} = 2\left[8y - 0 - 24\right]$

$f_{xy} = 2\left[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0\right]$

(7) $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$ $\quad f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$ $\quad f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

(8) $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$ $\quad f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$,

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

(9) $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$ $\quad f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

(10)

$$f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

(11)

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

(12)

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

(13)

$$f_x=10\cos\left(10x+4y\right)\qquad f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$$

$$f_y=4\cos\left(10x+4y\right)\qquad f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)$$

$$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)\qquad f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$$

(14)

$$f_x=yz\qquad f_{xx}=0\qquad f_{xy}=z\qquad f_{xz}=y$$

$$f_y=xz\qquad f_{yx}=z\qquad f_{yy}=0\qquad f_{yz}=x$$

$$f_z=xy\qquad f_{zx}=y\qquad f_{zy}=x\qquad f_{zz}=0$$

(15) -2

(16) -1

(17) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(18) $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

2) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

3) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\left(y+x^2\right)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

4) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת <u>דיפרנציאביליות</u> – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1) א. $f_y(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=0$

3) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_y(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$

5) א.
$$f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
$$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
ב. לא רציפות.

6) א. $f_{yx}(0,0)=1 \neq f_{xy}(0,0)=-1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

דיפרנציאבילות

שאלות

בשאלות **1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

1)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2)
$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x+y}{y+4x} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

5) בדקו דיפרנציאבילות הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^m} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נגדיר פונקציה חדשה $\phi(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy\geq 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$.

נתון $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$.

הוכיחו ש-ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

9) בדקו דיפרנציאבילות $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0,0)$.

10) נתונה $f:R^n\to R$, המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq 0\\ 0.5 & x=0\end{cases}$.

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x=0$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) לא דיפרנציאבילית.

2) דיפרנציאבילית.

3) לא דיפרנציאבילית.

4) לא דיפרנציאבילית.

5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.

6) א. $m>1$ ב. $m>0$ ג. $m>2$

7) א. $m<1$ ב. לכל m ג. $m<0.5$

8) שאלת הוכחה.

9) דיפרנציאבילית.

10) כן.

כתב ופתר – גיא סלומון ©