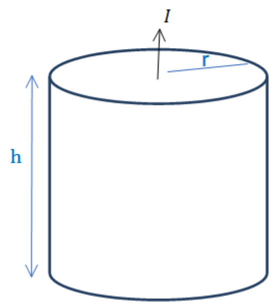
שדות אלקטרו מגנטיים

פרק 8 - נגדים זרם וצפיפות זרם

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

שאלות:



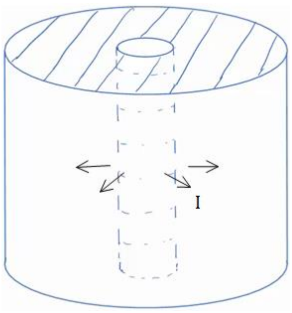
1) נוסחה לחישוב התנגדות ודוגמה עבור נגד גלילי

גליל מלא בעל רדיוס r וגובה h עשוי מחומר בעל התנגדות סגולית משתנה $\rho = \rho_0 \frac{z}{h}$ כאשר ρ_0 נתון ו-z הוא המרחק מבסיס הגליל.

א. חשב את ההתנגדות השקולה.
נתון שהזרם עובר בין הבסיסים (לאורך z)
מחברים את הגליל למקור מתח נתון V_0
(המתח הוא בין בסיס אחד לבסיס שני).

ב. מצא את הזרם הכולל בגליל.

ג. מצא את צפיפות הזרם והשדה החשמלי בגליל (פתרון בסרטון הבא).



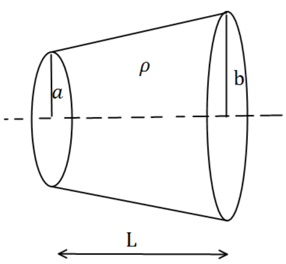
2) זרם רדיאלי

קליפה גלילית עבה עם רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b מלאה בחומר בעל התנגדות סגולית ρ אחידה ונתונה.

א. מצא את ההתנגדות השקולה של הקליפה אם הזרם זורם בכיוון הרדיאלי.

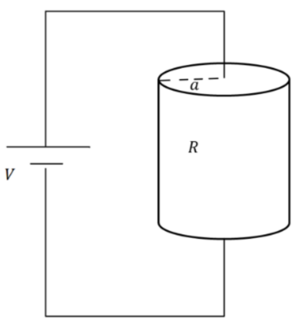
ב. מחברים מקור מתח V_0 בין המעטפת הפנימית למעטפת החיצונית של הקליפה.
מצא את צפיפות הזרם בקליפה.

ג. מצא את השדה החשמלי בתוך הקליפה.



3) חרוט קטום

נתון חרוט קטום שאורכו L, רדיוס בסיסו הקטן a ורדיוס בסיסו הגדול b.
בין שני הבסיסים נתון הפרש פוטנציאלים.
ההתנגדות הסגולית של החרוט היא ρ.
חשבו את ההתנגדות השקולה של החרוט.



4) צפיפות זרם בנגד גלילי

נגד גלילי בעל רדיוס a והתנגדות R מחובר למקור מתח V.

א. מצא את צפיפות הזרם הנפחית בנגד.

ב. מהי צפיפות הזרם המשטחית על הבסיס העליון?

ג. מהי צפיפות הזרם המשטחית על הבסיס התחתון?

5) אנטנת דיפול

התפלגות הזרם בתיל נתונה לפי:

$$I(x,t)=\begin{cases} I_0\cos(\omega t) & |x|<\frac{b}{2} \\ 0 & |x|>\frac{b}{2}\end{cases}$$

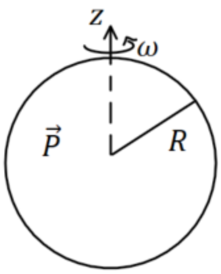
כאשר: I_0,ω,b קבועים נתונים.
מצא את התפלגות המטען ליחידת אורך במרחב.

6) צפיפות זרם ברגע נתון

צפיפות הזרם ברגע מסוים נתונה ע״י הנוסחה: $\vec{j}=\alpha\left(x^3\hat{x}+y^3\hat{y}+z^3\hat{z}\right)$
כאשר α קבועה וחיובית.

א. מהן היחידות של α?
ב. באותו הרגע, מהו קצב השינוי בצפיפות המטען בנקודה $(1,-3,4)$?
ג. נסמן את סך המטען בתוך כדור ברדיוס R שמרכזו בראשית הצירים ב-Q.
מצא את $\frac{dQ}{dt}$. האם Q גדל, קטן או נשאר קבוע?

7) כדור מקוטב מסתובב



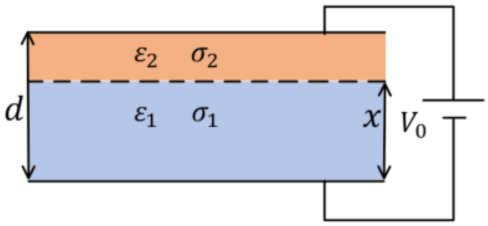
כדור שרדיוסו R מלא בחומר דיאלקטרי בקיטוב אחיד: $\vec{P}=P_0\hat{z}$. הכדור מסתובב סביב ציר ה-z במהירות זוויתית קבועה ω.
הנח שהקיטוב אינו משתנה בעקבות הסיבוב.

א. מצא את צפיפות הזרם של המטענים הקשורים.
ב. צייר גרף של צפיפות הזרם כפונקציה של הקואורדינטות המתאימות.
ג. מה סך הזרם שעובר דרך חצי עיגול ברדיוס R שבסיסו על ציר ה z?

8) צפיפות זרם בכדור מוליך עם לאפלס בכדוריות

כדור מוליך ברדיוס a עשוי מחומר בעל מוליכות אחידה σ.
שפת הכדור מוחזקת בפוטנציאל: $V(a)=V_0\cos\varphi$.
כאשר φ היא הזווית עם ציר ה z.
מצא את צפיפות הזרם בתוך הכדור.

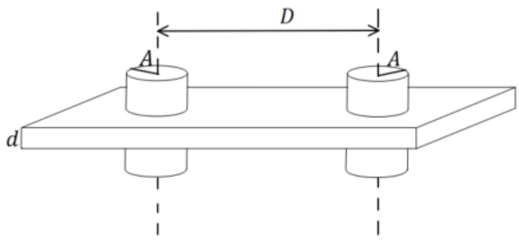
9) קבל עם שני חומרים דיאלקטריים מוליכים



קבל לוחות מלבני בעובי d מלא בשני חומרים דיאלקטרים מוליכים.
חומר אחד בעל מקדם דיאלקטרי ε_1 ומוליכות σ_1 וחומר שני בעל מקדם דיאלקטרי ε_2 ומוליכות σ_2.
החומר הראשון ממלא את הקבל עד למרחק x מהלוח התחתון והחומר השני ממלא את שאר הקבל (ראה איור).
הקבל מחובר למקור מתח V_0, הנח שהזרם בתוך הקבל קבוע.

א. מצא את הפוטנציאל במרחק x מהלוח התחתון וביחס אליו.
ב. מצא את צפיפות המטען החופשי בין החומרים.

10) שתי אלקטרודות גליליות במישור דיאלקטרי מוליך



נתון לוח אינסופי העשוי מחומר דיאלקטרי-מוליך אחיד שפאותיו מקבילות ועוביו d.
מוליכות המישור היא σ.
נתונים גם שני גלילים מתכתיים, שניהם בעלי רדיוס A וציריהם מקבילים.
המרחק בין צירי הגלילים הוא D.
הגלילים עוברים דרך הלוח הדיאלקטרי-מוליך כאשר ציריהם ניצבים לפאות הלוח.
מצא את הזרם שזורם בין הגלילים המתכתיים (המתארים בעצם שני אלקטרודות) במקרים הבאים, אם נתון שהפרש הפוטנציאלים ביניהם הוא V.

א. $A \ll D$.
ב. רדיוס הגלילים אינו קטן בהרבה מחצי המרחק בין הגלילים.
(בשביל סעיף זה צריך להכיר איך מוצאים פוטנציאל של שני גלילים מוליכים באמצעות שיטת השיקופים).

11) תיל בתחתית אגם

תיל ברדיוס A וארוך מאוד מונח בתחתית של אגם עמוק מאוד.
התיל מקביל לקרקע של האגם ומרכז התיל נמצא במרחק H ממנו.
הניחו שתחתית האגם היא מישור מוליך בעל מוליכות טובה מאוד ומוליכות המים היא σ.
מצאו את ההתנגדות בין התיל לתחתית האגם עבור יחידת אורך של התיל.

12) קליפה כדורית עבה ומוליכה עם כדור קטן בתוכה

קליפה כדורית מוליכה בעלת רדיוס פנימי $3R$ ורדיוס חיצוני $5R$ טעונה במטען Q. המוליכות הסגולית של הקליפה תלויה במרחק ממרכז הקליפה r לפי: $\sigma(r)=\sigma_0\frac{r^2}{3R^2}$. בתוך החלל הפנימי של הקליפה נמצא כדור ברדיוס R עם מוליכות גבוהה מאוד ביחס למוליכות הקליפה. מרכז הכדור מתלכד עם מרכז הקליפה. חוט מוליך (עם מוליכות גבוהה מאוד גם כן) מחבר את הכדור אל מחוץ לקליפה דרך תעלה צרה בקליפה. דרך החוט המוליך טענו את הכדור במטען $-Q$, והמתינו עד שהמערכת התייצבה.

א. כיצד מתפלג המטען על הכדור הפנימי וכיצד מתפלג המטען על הקליפה?

חיברו את הכדור להארקה לזמן קצר מאוד. בגלל המוליכות הגבוהה של הכדור (ביחס לקליפה) הפוטנציאל בו הספיק להתאפס בעוד שהתפלגות המטען על הקליפה העבה עדיין לא השתנתה. נסמן ב-$t=0$ את רגע הניתוק מההארקה.

ב. מה המטען על הכדור ב-$t=0$?

ג. אם נמתין זמן מספיק ארוך כיצד יתפלג המטען במרחב?

ד. חשב את השדה החשמלי במרחב כתלות במקום ובזמן.

ה. חשב את צפיפות המטען הנפחית כתלות במקום ובזמן בקליפה המוליכה.

ו. שרטט גרף של צפיפות המטען בקליפה ב-$r=4R$ כתלות בזמן.

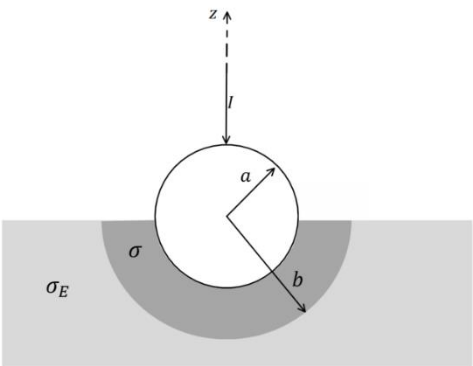
ז. חשב את צפיפות המטען המשטחית על הדופן הפנימית ועל הדופן החיצונית של הקליפה והשווה לסעיף ג'.

ח. הראה כי הספק החום המתפתח במוליך הוא: $\iiint\sigma(r)E^2(r,t)dv$.

ט. הראה כי האנרגיה הכוללת שהפכה לחום בקליפה שווה לשינוי באנרגיה האלקטרוסטטית של המערכת.

13) הארקה דרך כדור שקוע בקרקע

הארקה מחוברת לקרקע באופן הבא. חוט מוביל זרם I לתוך כדור מוליך מושלם ברדיוס a. הכדור שקוע בקרקע עד קו המשווה שלו. סמוך לשפת הכדור נוצרת שכבה שעוביה $b-a$ בעלת מוליכות σ. המוליכות של האדמה היא σ_E.

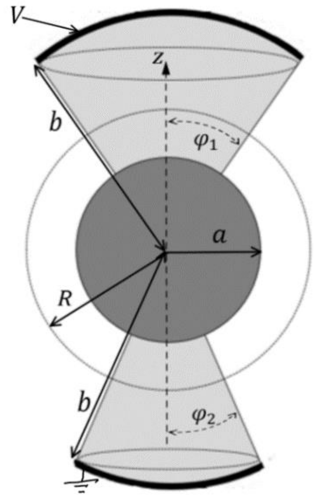


א. רשמו את תנאי השפה לפוטנציאל האלקטרוסטטי באדמה ובשכבה מסביב לכדור.

ב. חשבו את פונקציית הפוטנציאל באזורים הנ"ל.

ג. מצאו את ההתנגדות של האדמה כולל השכבה.

ד. מהי צפיפות הזרם המשטחית על שפת הכדור (מעל המשווה ומתחת)?



14) כדור ושתי גזרות

המבנה באיור עשוי מהחלקים הבאים:

גזרה כדורית עליונה

בתחום: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \varphi_1$,

$a \le r \le b$ העשויה מחומר בעל מוליכות σ.

כדור מרכזי ברדיוס a עשוי מוליך מושלם

וגזרה כדורית תחתונה

בתחום: $0 \le \theta \le 2\pi$ $a \le r \le b$, $0 \le \varphi \le \varphi_2$,

בעלת מוליכות σ גם כן.

על פני הגזרה העליונה מונח משטח כדורי עשוי מוליך מושלם ברדיוס $r = b$ המחובר לפוטנציאל V.

באותו האופן מונח משטח כדורי על פני הגזרה התחתונה עשוי מוליך מושלם ומוארק.

המשטחים מתוארים בקו העבה באיור.

א. הניחו כי צפיפויות הזרם הנפחיות בגזרה העליונה והתחתונה הן: $\vec{J}_1$ ו-$\vec{J}_2$ ורשמו את חוק שימור המטען, בצורתו האינטגרלית, על מעטפת כדורית ברדיוס R (מסומנת במקווקו באיור).

ב. הראו כי בתוך המוליכים הסופיים הפוטנציאל מקיים את משוואת לאפלס ורשמו את תנאי השפה לפוטנציאל.

ג. מצאו את הפוטנציאל וחשבו את השדה החשמלי בתוך המבנה ואת צפיפות הזרם המתאימה.

ד. השתמשו בחוק אמפר האינטגרלי וחשבו את $\vec{H}$ בגזרה העליונה.

הניחו כי השדה בכיוון $\hat{\theta}$ בלבד.

ה. הראו כי משפט פויינטינג מתקיים בגזרה העליונה.

תשובות סופיות:

1) א. $R_T=\frac{\rho_0 h}{2\pi r^2}$. ב. $I=\frac{V_0}{R_T}$. ג. $\vec{J}=\frac{I}{\pi r^2}\hat{z}$, $E=\rho_0\frac{z}{h}\frac{I}{\pi r^2}\hat{z}$.

2) א. $R_T=\frac{\rho}{2\pi h}\ln\frac{b}{a}$. ב. $\vec{J}=\frac{V_0}{R_T 2\pi rh}\hat{r}$. ג. $E=\frac{\rho V_0}{R_T 2\pi rh}\hat{r}$.

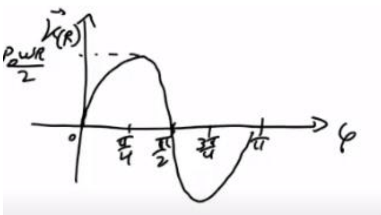
3) $R=\frac{\rho L}{\pi ab}$.

4) א. $J=\frac{V}{\pi a^2 R}$. ב. $K_r(r)=\frac{V}{2\pi a^2 R}\left(\frac{\alpha^2}{r}-r\right)$.
ג. $K_r(r)=-\frac{V}{2\pi a^2 R}\left(\frac{\alpha^2}{r}-r\right)$.

5) $\lambda(x,t)=\frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t)\left(\delta\left(\frac{b}{2}-x\right)-\delta\left(\frac{b}{2}+x\right)\right)$.

6) א. $\frac{A}{m^5}$. ב. $\frac{d\rho}{dt}=-78\alpha\cdot m^2$. ג. $\frac{dQ}{dt}=12\pi\alpha\cdot\frac{R^5}{5}$, המטען גדל.

7) א. $\vec{K}=\frac{1}{2}\rho_0\omega R\sin 2\varphi\hat{\theta}$. ב. גרף:



ג. $I=0$.

8) $\vec{J}=-\frac{\sigma V_0}{a}\hat{z}$.

9) א. $\frac{\sigma_2 V_0\cdot x}{x(\sigma_2-\sigma_1)+\sigma_1 d}$. ב. $\sigma_\rho=\frac{(\varepsilon_1\sigma_2-\varepsilon_2\sigma 1)V_0}{x(\sigma_2-\sigma_1)+\sigma_1 d}$.

10) א. $\frac{\pi\sigma dV}{\ln\frac{D-A}{A}}$. ב. $\frac{\sigma\pi V}{\ln\left(\frac{D}{2A}+\sqrt{\left(\frac{D}{2A}\right)^2-1}\right)}$.

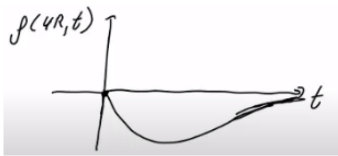
11) $R=\frac{\ln\left(\frac{H}{A}+\sqrt{\left(\frac{H}{A}\right)^2-1}\right)}{2\pi\sigma l}$.

12) א. פנימי: $\eta(R)=\frac{-Q}{4\pi R^2}$, קליפה: $\eta(5R)=0$, $\eta(3R)=\frac{Q}{4\pi(3R)^2}$.
ב. $q^?=-\frac{Q}{3}$.

ג. $\rho=0$, $\eta(5R)=\dfrac{\frac{2Q}{3}}{4\pi(5R)^2}$, $\eta(3R)=\dfrac{\frac{Q}{3}}{4\pi(3R)^2}$, $\eta(R)=\dfrac{\frac{-Q}{3}}{4\pi R^2}$.

ד. $E(r,t)=\dfrac{2KQ}{3r^2}\cdot e^{-\frac{\sigma(r)t}{\varepsilon_0}}$.   ה. $\rho(r,t)=-\dfrac{4KQ\sigma_0 t}{9R^2 r}e^{-\frac{\sigma(r)t}{\varepsilon_0}}$.

ו. שרטוט:



ז. $\eta(5R,t)=\dfrac{2Q}{4\pi\cdot 75R^2}\left(1-e^{-\frac{25\sigma_0 t}{3\varepsilon_0}}\right)$, $\eta(3R,t)=\dfrac{Q}{4\pi\cdot 27R^2}\left(e^{-\frac{3\sigma_0 t}{\varepsilon_0}}+1\right)$.

ח. הוכחה.   ט. הוכחה.

13) א. ראה סרטון.   ב. $\phi_2=\dfrac{I}{2\pi\sigma_E r}$, $A_1=\dfrac{I}{2\pi b}\left(\dfrac{1}{\sigma_E}+\dfrac{1}{\sigma}\right)$, $\phi_1=A_1+\dfrac{I}{2\pi\sigma r}$.

ג. $R=\dfrac{1}{2\pi b}\left(\dfrac{1}{\sigma_E}-\dfrac{1}{\sigma}\right)+\dfrac{1}{2\pi a\sigma}$.   ד. $K_\varphi=\dfrac{I}{2\pi a}\left(\dfrac{\cos\varphi+1}{\sin\varphi}\right)$.

14) א. $J_{1_r}(1-\cos\varphi_1)=-J_{2_r}(1-\cos\varphi_2)$.   ב. ראה סרטון.

ג. $\phi_2=A_2+\dfrac{B_2}{r}$, $\phi_1=A_1+\dfrac{B_1}{r}$, $B_1=-\dfrac{abKV}{(b-a)(1-K)}$, $A_1=V-\dfrac{aKV}{(b-a)(1-K)}$,

$K=\dfrac{1-\cos\varphi_2}{1-\cos\varphi_1}$, $B_2=\dfrac{abV}{(b-a)(1-K)}$, $A_2=-\dfrac{aV}{(b-a)(1-K)}$.

ד. $\vec{H}=\dfrac{\sigma B_1}{r}\dfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\hat{\theta}$.