# מבוא להסתברות

## פרק 22 - משתנה דו-מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

# משתנה דו מימדי בדיד – פונקציית הסתברות משותפת:

## רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים. נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית, בה יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית: $X$ ו- $Y$.

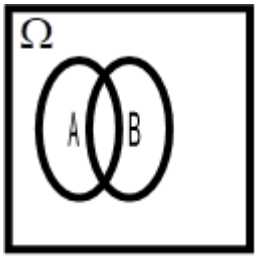
**דוגמה:**

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי $X$ מספר הקורסים שהסטודנט עבר. ויהי $Y$ משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.

בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של $X$ ו- $Y$.

**נחשב את כל ההסתברויות המשותפות:**




| $y/x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| **0** | 0.05 | 0.15 | 0 |
| **1** | 0 | 0.05 | 0.75 |

$$p(x=o, y=0)=0.05$$
$$p(x=o, y=1)=0$$
$$p(x=1, y=0)=0.15$$
$$p(x=1, y=1)=0.05$$
$$p(x=2, y=0)=0$$
$$p(x=2, y=1)=0.75$$

שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שוליות:

| $Y/X$ | 0 | 1 | 2 | $P_Y$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0.05 | 0.15 | 0 | 0.2 |
| **1** | 0 | 0.05 | 0.75 | 0.8 |
| $P_X$ | 0.05 | 0.2 | 0.75 | 1 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**משתנים בלתי תלויים:**

$X$ ו- $Y$ יהיו משתנים בלתי תלויים, אם עבור כל $X$ ו- $Y$ אפשריים התקיים הדבר הבא: $p(x=k,y=l)=p(x=k)\cdot p(y=l)$.

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

**דוגמה:**

$p(x=2,y=1)=0.75\neq p(x=2)\cdot p(y=1)=0.75\cdot 0.8=0.6$.

ככלל, אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים, שאז הרי התנאי לא מתקיים. אך אם אין אפס בטבלה, אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר. הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 0.3 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר. אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר, אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ-3 משחקים.
נגדיר את $X$ להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת $Y$ כמספר המשחקים שהאדם שיחק.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.

ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?

ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר, מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

**2)** להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים:

| $Y/X$ | 0 | 1 | 2 | $P(Y)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 0.08 | 0.12 | 0.4 |
| 3 | 0.1 | 0.05 | | |
| 4 | | | | 0.45 |
| $P(X)$ | | 0.4 | 0.2 | |

א. השלימו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. האם $X$ ו- $Y$ תלויים ?

ג. מצאו את הסתברות ש- $Y=3$, אם ידוע ש- $X=1$.

**3)** מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא $\frac{1}{10}$. מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקרת איכות.
יהי $X$ מספר המוצרים בחבילה, ו- $Y$ מספר המוצרים הפגומים בחבילה.

א. מה ההתפלגות של המשתנה $Y$ בהינתן $x=3$.

ב. מה ההתפלגות של המשתנה $Y$ בהינתן $X$ הינו $K$ כלשהו.

ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.

ד. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** מתוך כד עם 3 כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שניים ללא החזרה. יהי $X$ המספר הקטן מבין השניים ו- $Y$ הגדול מביניהם.

א. חשבו את ההתפלגות של $(X,Y)$.

ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמקסימאלי הוא 8?

ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של $X$ בהינתן $Y=4$. מצאו: $E(X/Y=4)$.

**5)** ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב: ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב, ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב ול-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים.
יהי $X$ מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון, ויהי $Y$ משתנה אינדיקטור:
1 – אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.
0 – אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של $X$ ו- $Y$.

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. להלן טבלה: ב. 2.4. ג. תוחלת: 1.348, שונות: 0.575.

| $x \setminus y$ | 0 | 50 | 100 | $P(y)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0.3 | 0.3 |
| 3 | 0.343 | 0.294 | 0.063 | 0.7 |
| $P(x)$ | 0.343 | 0.294 | 0.363 | 1 |

**2)** א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.125.

| $x \setminus y$ | 0 | 1 | 2 | $P(y)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.2 | 0.08 | 0.12 | 0.4 |
| 3 | 0.1 | 0.05 | 0 | 0.15 |
| 4 | 0.1 | 0.27 | 0.08 | 0.45 |
| $P(x)$ | 0.4 | 0.4 | 0.2 | 1 |

**3)** א. $y/x=3 \sim B\left(n=3,\ p=\frac{1}{10}\right)$. ב. $y/x=k \sim B\left(n=k,\ p=\frac{1}{10}\right)$.

ג. 0.3. ד. להלן טבלה:

| $x \setminus y$ | 2 | 3 | $P(y)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.405 | 0.3645 | |
| 1 | 0.09 | 0.1215 | |
| 2 | 0.005 | 0.0135 | |
| 3 | 0 | 0.0005 | |
| $P(x)$ | 0.5 | 0.5 | 1 |

**4)** א. להלן טבלה: ב. 0.5. תוחלת: 2.

| $x \setminus y$ | 2 | 4 | $P(y)$ |
|---|---|---|---|
| 4 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 8 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $P(x)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** א+ב. להלן טבלה: ג. 0.75.

| $x \setminus y$ | **0** | **1** | **2** | $P(y)$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0.05 | 0.35 | 0 | 0.4 |
| **1** | 0 | 0.45 | 0.15 | 0.6 |
| $P(x)$ | 0.05 | 0.8 | 0.15 | 1 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל