תורת ההסתברות

פרק 37 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

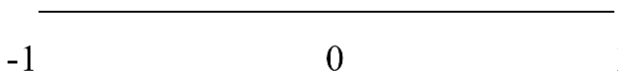
תוכן העניינים

1. כללי 1

משתנה דו מימדי בדיד – מתאם בין משתנים:

רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב- ρ.
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.



מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים, שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y=ax+b$.
מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר ליניארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר ליניארי מלא בו השיפוע a שלילי (מקדם מתאם 1-).
מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

חישוב מקדם המתאם:

הנוסחה של מקדם המתאם היא: $\rho=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$.

השונות המשותפת: $\operatorname{cov}(x,y)=E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)$.

תכונות של השונות המשותפת:

1) $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.
2) $\operatorname{cov}(X,X)=Var(X)$.

משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס, וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס. משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין ביניהם התאמה לינארית.
משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין ביניהם קשר ולכן גם הם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

השפעת טרנספורמצייה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho\left[(aX+b),(cY+d)\right]=\begin{cases}\rho(X,Y)___if\ __a\cdot c>0\\ -\rho(X,Y)__if\ __a\cdot c<0\end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר ביניהם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:
תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר, ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1, אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.
נחשב את מקדם המתאם:

X/Y	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

X	0	1	2
P_X	0.05	0.2	0.75

$$E(X)=\sum_i x_iP(x_i)=\mu=0\cdot0.05+1\cdot0.2+2\cdot0.75=1.7$$

$$V(X)=\sum_i(x_i-\mu)^2P(x_i)=\sum_i x_i^2P(x_i)-\mu^2=0^2\cdot0.05+1^2\cdot0.2+2^2\cdot0.75-1.7^2=0.31=\sigma^2$$

y	P_Y
0	0.2
1	0.8

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.31}=0.557$$

$$E(y)=\sum_i y_iP(y_i)=0+0.8=0.8$$

$$V(y)=\sum_i(y_i-\mu_y)^2P(y_i)=\sum_i y_i^2P(y_i)-\mu_y{}^2=0+0.8-0.8^2=0.16=\sigma_y{}^2$$

$$\sigma_y=\sqrt{0.16}=0.4$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$$E(xy)=0\cdot 0\cdot 0.05+0\cdot 1\cdot 0+1\cdot 0\cdot 0.15+1\cdot 1\cdot 0.05+2\cdot 0\cdot 0+2\cdot 1\cdot 0.75=1.55$$

$$\mathrm{cov}(x,y)=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)=1.55-1.7\cdot 0.8=0.19$$

$$\rho=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{0.19}{0.557\cdot 0.4}=0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הסיכוי שסטודנט יעבור את המבחן במועד א' בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך ב-0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2, והסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
נגדיר את X להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט, ונגדיר את Y להיות מספר המבחנים שנכשל בהם.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פוני ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?

ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?

ד. האם המתאם בין X ל- Y מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבירו ללא חישוב.

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X לבין Y.

ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?

2) נטיל מטבע שלוש פעמים. נגדיר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות, ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות.

ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y. האם המשתנים מתואמים?

ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?

ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?

3) נפזר שלושה כדורים שונים בשלושה תאים. נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הכדורים בתא הראשון.
Y - מספר הכדורים בתא השני.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

ב. האם המשתנים בלתי מתואמים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) קובייה הוגנת הוטלה פעמיים.
יהי X ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות, ויהי Y מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.

א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

ב. חשבו את מקדם המתאם של X ו- Y.

ג. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן ש- $X=2$.

5) בבניין שלנו 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן. הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין.
נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.
Y - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים מתואמים?

ג. מה מקדם המתאם בין X לבין Y?

ד. מה יהיה מקדם המתאם:

i. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.

ii. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.

ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון ₪ וכל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון ₪. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.994 ד. חלקי חיובי.

$x \setminus y$	1	2	3	$P(y)$
0	0.8	0	0	0.8
1	0	0.18	0	0.18
2	0	0.016	0.0028	0.0188
3	0	0	0.0012	0.0012
$P(x)$	0.8	0.196	0.004	1

ה. 0.963. ו. מתואמים.

2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מקדם המתאם: 0.5, מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

ד. 0.25. ה. 0.5.

3) א. להלן טבלה: ב. מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	0

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) א. להלן טבלה: ב. 0.252.

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	0
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$

5) א. להלן טבלה: ב. X ו- Y מתואמים. ג. $\frac{2}{3}$.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.1	0	0	0.1
1	0.2	0.4	0	0.6
2	0	0.2	0.1	0.3
$P(x)$	0.3	0.6	0.1	1

ד. i. $-\frac{2}{3}$. ii. -1. ה. $-\frac{2}{3}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל