

תורת ההסתברות

פרק 39 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים (פרק 7,6 ממ"ן 14,
13)

תוכן העניינים

1. כללי 1

השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho[(aX+b), (cY+d)] = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר ביניהם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר, ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1, אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.

נחשב את מקדם המתאם:

X/Y	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

X	0	1	2
P_X	0.05	0.2	0.75

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.75 = 1.7$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.75 - 1.7^2 = 0.31 = \sigma^2$$

y	P_Y
0	0.2
1	0.8

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.31} = 0.557$$

$$E(y) = \sum_i y_i P(y_i) = 0 + 0.8 = 0.8$$

$$V(y) = \sum_i (y_i - \mu_y)^2 P(y_i) = \sum_i y_i^2 P(y_i) - \mu_y^2 = 0 + 0.8 - 0.8^2 = 0.16 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.16} = 0.4$$

$$E(xy) = 0 \cdot 0 \cdot 0.05 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0.75 = 1.55$$

$$\text{cov}(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) = 1.55 - 1.7 \cdot 0.8 = 0.19$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0.19}{0.557 \cdot 0.4} = 0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y ?

שאלות:

- (1) הסיכוי שסטודנט יעבור את המבחן במועד א' בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך ב-0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2, והסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
- נגדיר את X להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט, ונגדיר את Y להיות מספר המבחנים שנכשל בהם.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פוני ההסתברות השולית.
 - האם המשתנים הינם בלתי תלויים?
 - ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?
 - האם המתאם בין X ל- Y מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבירו ללא חישוב.
 - חשבו את מקדם המתאם בין X לבין Y .
 - האם המשתנים הם בלתי מתאומים?
- (2) נטיל מטבע שלוש פעמים. נגדיר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות, ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות.
 - האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?
 - מהו מקדם המתאם בין X ל- Y . האם המשתנים מתאומים?
 - אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?
 - אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?
- (3) נפזר שלושה כדורים שונים בשלושה תאים. נגדיר את המשתנים הבאים:
- X - מספר הכדורים בתא הראשון.
 - Y - מספר הכדורים בתא השני.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
 - האם המשתנים בלתי מתאומים?

- (4) קובייה הוגנת הוטלה פעמיים. יהי X ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות, ויהי Y מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.
- מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .
 - חשבו את מקדם המתאם של X ו- Y .
 - מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן ש- $X = 2$.
- (5) בבניין שלנו 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן. הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין. נגדיר את המשתנים הבאים:
- X - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.
 - Y - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונקציית ההסתברות השולית.
 - האם המשתנים מתואמים?
 - מה מקדם המתאם בין X לבין Y ?
 - מה יהיה מקדם המתאם:
- בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.
 - בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.
- ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון ₪ וכל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון ₪. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.994 ד. חלקי חיובי.

$x \setminus y$	1	2	3	$P(y)$
0	0.8	0	0	0.8
1	0	0.18	0	0.18
2	0	0.016	0.0028	0.0188
3	0	0	0.0012	0.0012
$P(x)$	0.8	0.196	0.004	1

ה. 0.963 ו. מתואמים.

(2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מקדם המתאם: 0.5, מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

ד. 0.25 ה. 0.5

(3) א. להלן טבלה: ב. מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	0

(4) א. להלן טבלה: ב. 0.252.

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	0
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$

ג. $\frac{2}{3}$.

(5) א. להלן טבלה: ב. X ו- Y מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.1	0	0	0.1
1	0.2	0.4	0	0.6
2	0	0.2	0.1	0.3
$P(x)$	0.3	0.6	0.1	1

ה. $-\frac{2}{3}$.

ii. -1.

ד. i. $-\frac{2}{3}$.