

מתמטיקה למדעים 1

פרק 14 - משפט רול

תוכן העניינים

1. משפט רול.....1

משפט רול

שאלות

- (1) בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $[0, 2]$

ב. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ $[-1, 1]$

(2) נתון ש- $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

- הראו ש- $f(1) = f(5)$, אך אין נקודה c , כך ש- $f'(c) = 0$.
האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

- (3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,
ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0, x_1, x_2 , עבורן $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$.
הוכיחו שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c) = 0$.

- (4) תהי $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.
נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
הוכיחו שקיימת $x_0 \in (0, 1)$, כך ש- $f'''(x_0) = 0$.

- (5) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.
נניח שמתקיים $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.
הראו שלמשוואה $f'''(x) = 0$ יש פתרון.

- (6) נתון כי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.
נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0 = 2$.
הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

(7) נתונה פונקציה f , גזירה ב- $\mathbb{R}$.

תהי g מוגדרת על ידי $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$.

הראו כי g גזירה ב- $\mathbb{R}$, והוכיחו כי הנגזרת, g' ,

מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1, 1)$.

(8) הוכיחו:

אם f גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1) = 0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי

$g(x) = xf(x)$, גזירה ב- $\mathbb{R}$, וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x) = 0$.

(9) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$ ו- $f(x) > 0$ לכל $0 < x \leq 1$.

הוכיחו שקיים $c \in (0, 1)$, כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = 2 \frac{f'(c)}{f(c)}$.

(10) אם $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$, $(c_i \in \mathbb{R})$,

הוכיחו שלמשוואה $c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$

יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0, 1)$.

(11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

הראו שלמשוואה $f'(x) = 2x$ קיים פתרון בקטע $(0, 1)$.

(12) תהיינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות.

נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$.

הראו שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g .

(13) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה,

כך ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.

ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.

ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0, 1)$.

14 ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n \text{ שלכל}$$

חשבו את $f'(0)$.

ב. תהי $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f'(0) > 0$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq 1 \text{ טבעי, } n \text{ שלכל}$$

15 תהי $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n \text{ שלכל}$$

חשבו את $f'(1)$.

16 נתון כי f, g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x) = A$ יש לכל היותר פתרון אחד.

A קבוע כלשהו.

17 נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.

תהי x_0 נקודה כלשהי.

הוכיחו כי לגרף של $y = f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפת

אחת ויחידה - x_0 .

במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של $y = f(x)$ נמצאו כולו מעל המשיק או

מתחתיו.

18 נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a, b) , ולכל $x \in (a, b)$ מתקיים

$$(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$$

נתון שלמשוואה $f'(x) = 0$ יש שלושה פתרונות בקטע.

הוכיחו שלמשוואה $f(x) = 0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.

תנו דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$.

19 נתון כי $f(x), g(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) .

נתון בנוסף כי $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$.

הוכיחו שקיימת נקודה $a < c < b$ כך ש- $f'(c) = g'(c)$.

- (20) הפונקציות f ו- g רציפות ב- $[a, b]$ וגזירות ב- (a, b) .
 ידוע כי $f(a) \geq g(a)$ ו- $f'(x) > g'(x)$ ב- (a, b) .
 הוכיחו כי $f(x) > g(x)$ ב- (a, b) .

תשובות סופיות

- (1) א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. כן, $2 - \sqrt{3}$.
 (2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.
 (14) א. 0 ב. שאלת הוכחה.
 (15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il