

# מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 45 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס.....1

## משפט סטוקס

### שאלות

בשאלות 1-3 בדקו שמשפט סטוקס אכן מתקיים.  
כלומר, חשבו את האינטגרל  $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$ , ואת האינטגרל  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , והראו שהם שווים זה לזה (ראו הערת סימון בעמוד הבא).

(1)  $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$ ;  $S$  חלק הפרבולואיד  $z = 4 - x^2 - y^2$ , שבו  $z \geq 0$ .

(2)  $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור  $xy$ .

(3)  $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ ;  $S$  הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים  $y = 2$ ,  $2x + z = 6$ , ושאינו כלול  
א. במישור  $xy$ .  
ב. במישור  $y = 2$ .  
ג. במישור  $2x + z = 6$ .

(4) חשבו את האינטגרל  $\oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz$ , כאשר  $C$  עקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$  ל- $(0,3,3)$ , משם ל- $(1,3,3)$  ומשם ל- $(1,0,0)$ .

(5) חשבו את האינטגרל  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , כאשר  $\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$ ; ו- $C$  היא שפת המשולש, שקדקודיו הם  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$  וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- $z$ ).

(6) חשבו את  $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ , כאשר  $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ ; ו- $S$  הוא החלק של הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$ , ומעל למישור  $xy$ .

(7) חשבו את  $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ , כאשר  $\mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$ ;

ו-  $S$  הוא משטח החרוט  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , מעל למישור- $xy$ .

### הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי  $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ ,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

### תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא  $12\pi$ .

(2) הערך המשותף הוא  $-16\pi$ .

(3) הערך המשותף הוא: א. -6      ב. -9      ג. -18

(4) -90

(5) -1

(6) 0

(7)  $12\pi$