# חשבון אינפיטיסימלי 2

## פרק 30 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

### תוכן העניינים

1. משפט הדיברגנץ ..... 1

# משפט הדיברגנץ (גאוס)

## שאלות

בשאלות **1-3** אשרו את משפט הדיברגנץ.
כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ , ואת האינטגרל $\iiint_G div\mathbf{F}dV$ ,
והראו שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$).
(ראו הערת סימון בעמוד הבא)

**1)** $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הקובייה $G$,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

**2)** $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הכדור $G$, $x^2+y^2+z^2=1$.

**3)** $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הפירמידה $G$,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

**4)** יהי $S$ פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו-$z=2$.
חשבו את ה**שטף** של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך $S$.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$.

**5)** חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$.
$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

**6)** חשבו את $\iint_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$,
כאשר $S$ הוא פני הגוף החסום על ידי $z=0,\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

**7)** יהי $S$ משטח <u>פתוח</u> $x^2+z^2=16$ , $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשבו את ה**שטף** דרך $S$ של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.
כלומר, חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$.

$$;\ \mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}$$

$S$ הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\ge 0$ (המשטח פתוח).

**הערת סימון**

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\iiint_G div\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

## תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

3) הערך המשותף הוא 27.

4) $279\pi$

5) 16

6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

7) 0

8) $-4\pi$


כתב ופתר – גיא סלומון ©