

# מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 43 - משפט גרין

תוכן העניינים

1. משפט גרין..... 1

## משפט גרין

## שאלות

בשאלות 1-3 אשרו את משפט גרין.

כלומר, חשבו את האינטגרל  $\oint_C f dx + g dy$  ואת האינטגרל  $\iint_R (g_x - f_y) dA$ ,

והראו שהם שווים זה לזה.



(1)  $\oint_C x^2 y dx + x dy$ ; המסלול C מתואר בציור:



(2)  $\oint_C (x - y^2) dx + dy$ ; המסלול C מתואר בציור:

(3)  $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$ ; C הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$  בכיוון החיובי.

(4) חשבו את העבודה שמבצע שדה הכוח  $\mathbf{F}(x,y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה  $x^2 + y^2 = 1$ , בכיוון הפוך לכיוון השעון, ומשלים הקפה אחת.

(5) חשבו את האינטגרל  $\int_C \left( e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + (xe^y + y \cos y^2) dy$ , כאשר C הוא

האיחוד של העקומים  $y = 8 - x^2$ ,  $y = x^2$  ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשבו את האינטגרל  $\int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$

כאשר  $C$  הוא חצי האליפסה  $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$  מהנקודה  $(2, 0)$  לנקודה  $(-2, 0)$ .

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט  $C$ ,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

ב. חשבו את שטח האליפסה  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

(8) נתון האינטגרל הקווי  $\oint_C (x^3 + 3x^2y + 3xy^2y^3) dx + (3x^2y + 3x - \sin y) dy$

כאשר  $C$  מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.

מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?

עבור איזו מסילה  $C$  הוא מתקבל?

(9) הוכיחו שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין  $C$ ,

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy = 0$$

(10) חשבו את  $\oint_C \frac{4x-y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dx + \frac{x-4y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dy$ , כאשר:

א.  $C$  הוא המעגל  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ .

ב.  $C$  הוא המעגל  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 144$ .

ג.  $C$  היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

## תשובות סופיות

- (1) הערך המשותף הוא 0.5.
- (2) הערך המשותף הוא 0.8.
- (3) הערך המשותף הוא 8.
- (4)  $1.5\pi$
- (5)  $0.5\sin 64$
- (6)  $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$
- (7) א. הוכחה. ב.  $\pi ab$
- (8) הערך המקסימלי הוא  $\frac{6\pi}{4}$ , עבור המסילה  $C: x^2 + y^2 = 1$ .
- (9) הוכחה.
- (10) א. 0 ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג.  $\frac{\pi}{2}$