# חדוא 2

## פרק 28 - משפט גרין

### תוכן העניינים

1. משפט גרין ..... 1

# משפט גרין

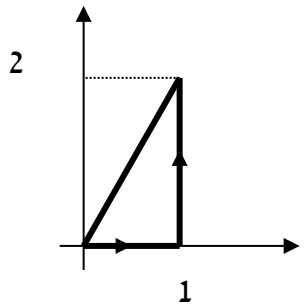
## שאלות

בשאלות **1-3** אשרו את משפט גרין.

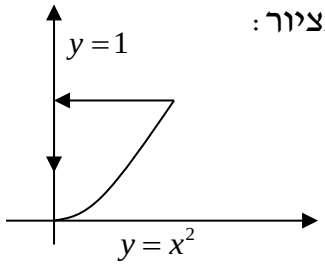
כלומר, חשבו את האינטגרל $\oint_C fdx+gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x-f_y)dA$,

והראו שהם שווים זה לזה.

**1)** $\oint_C x^2ydx+xdy$ ; המסלול $C$ מתואר בציור:




**2)** $\oint_C (x-y^2)dx+dy$ ; המסלול $C$ מתואר בציור:




**3)** $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$ , $C$ הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ בכיוון החיובי.

**4)** חשבו את **העבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\mathbf{i}+\left(\cos y+x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$ , בכיוון הפוך לכיוון השעון,

ומשלים הקפה אחת.

**5)** חשבו את האינטגרל $\int_C \left(e^y-\tan\frac{x}{2}\right)dx+\left(xe^y+y\cos y^2\right)dy$ , כאשר $C$ הוא

האיחוד של העקומים $y=x^2,\ y=8-x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** חשבו את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy$,

כאשר $C$ הוא חצי האליפסה $\left\{x^2+4y^2=4,\ y\ge 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$

לנקודה $(-2,0)$.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט $C$,

נתון על ידי $\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$.

ב. חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**8)** נתון האינטגרל הקווי $\oint_C\left(x^3+3x^2y+3xy^2y^3\right)dx+\left(3x^2y+3x-\sin y\right)dy$,

כאשר $C$ מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.
מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?
עבור איזו מסילה $C$ הוא מתקבל?

**9)** הוכיחו שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין $C$,
החוסמת שטח במישור, והמקיימת $\oint_C -y^3dx+x^3dy=0$.

**10)** חשבו את $\oint_C \frac{4x-y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dx+\frac{x-4y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dy$, כאשר:

א. $C$ הוא המעגל $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

ב. $C$ הוא המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=144$.

ג. $C$ היא מסילה כלשהי סביב הראשית.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 0.5.
2) הערך המשותף הוא 0.8.
3) הערך המשותף הוא 8.
4) $1.5\pi$
5) $0.5\sin 64$
6) $\frac{8}{3}+e^4-\frac{1}{e^4}$
7) א. הוכחה. ב. $\pi ab$
8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2+y^2=1$.
9) הוכחה.
10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©