# מתמטיקה לתוכנית פכ"מ

## פרק 35 - משפטי רול ולגראנז'

### תוכן העניינים


1. משפט רול ..... 1
2. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע [a,b] ..... 5
3. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע [o,x] ..... 7
4. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים עם מספרים ..... 8
5. משפט לגראנז' - שאלות כלליות ..... 9

# משפט רול

## שאלות

**1)** בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי $c$ המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\quad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

**2)** נתון ש- $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה $c$, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

**3)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, $x_0,x_1,x_2$, עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכיחו שקיים $c$ ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

**4)** תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל $n$ טבעי מתקיים $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

הוכיחו שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראו שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

**6)** נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי $f$ פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה פונקציה $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ .
תהי $g$ מוגדרת על ידי $g(x)=(x^2-1)f(x)$ .
הראו כי $g$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ , והוכיחו כי הנגזרת, $g'$ ,
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$ .

**8)** הוכיחו:
אם $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$ , אז הפונקציה $g(x)$ , המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ , וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$ .

**9)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$ .
הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$ , כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}=2\frac{f'(c)}{f(c)}$ .

**10)** אם $c_0+\frac{c_1}{2}+...+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$ ,
הוכיחו שלמשוואה $c_0+c_1x+...+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$ .

**11)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$ .
הראו שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$ .

**12)** תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל $x$ ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\ne g'(x)f(x)$ .
הראו שבין כל שני שורשים של $f$ קיים לפחות שורש אחד של $g$ .

**13)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(1)>0,\ f'(0)>0$ .
א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$ .


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל $n$ טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.

הוכיחו שקיים $n$ טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

**15)** תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל $n$ טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(1)$.

**16)** נתון כי $f,g$ גזירות לכל $x$ וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.
$A$ קבוע כלשהו.

**17)** נתון כי $f$ גזירה לכל $x$ וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.
תהי $x_0$ נקודה כלשהי.
הוכיחו כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה $x_0$ יש נקודה משותפת אחת ויחידה - $x_0$.
במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של $y=f(x)$ נמצאו כולו מעל המשיק או מתחתיו.

**18)** נתון כי $f$ גזירה פעמיים בקטע $(a,b)$, ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.
נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.
תנו דוגמה לפונקציה $f$ המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

**19)** נתון כי $f(x),\ g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע $(a,b)$.
נתון בנוסף כי $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$.
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=g'(c)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** הפונקציות $f$ ו- $g$ רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- $(a,b)$.
ידוע כי $f(a) \geq g(a)$ ו- $f'(x) > g'(x)$ ב- $(a,b)$.
הוכיחו כי $f(x) > g(x)$ ב- $(a,b]$.

## תשובות סופיות

**1)** א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.  ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

**2)** לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

**14)** א. 0  ב. שאלת הוכחה.

**15)** 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (0<a<b)$

2) $\frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b}-\sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (0<a<b)$

3) $(a-b)e^{-a} < e^{-b}-e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (a<b)$

4) $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$

5) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (0<a<b)$

6) $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (0<a<b<1)$

7) $\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (0<a<b)$

8) $\frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (0<a<b<1)$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) $\sqrt[n]{b}\cdot\frac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\frac{b-a}{n\cdot a}$ $(0<a<b)$

10) $\frac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\frac{2a(b-a)}{a^2+1}$ $(1<a<b)$

11) $\ln b-\ln a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\le\frac{1}{4}(b-a)$ $(1<a<b<3)$

12) $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

13) $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

14) $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$ $(x<y)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\ x<\tan x<\frac{x}{\cos^2 x}$

2) $(x>0)\ \frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$

3) $(0<x<1)\ x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $(x>0)\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\operatorname{arcsinh}(x)<x$

5) $(0<x<1)\ x<\operatorname{arctanh}(x)<\frac{x}{1-x^2}$

6) $(x>0)\ \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

7) $(x>0)\ 1+x<e^x<1+xe^x$

8) $(x>0)\ \sin x\le x$

9) $\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)\ \tan x<4x$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

## שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5$

3) $\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט לגראנז' – שאלות כלליות

## שאלות

**1)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת $|f'(x)|\le 5$.
ידוע כי $f(4)=18$ , $f(1)=3$ .
הוכיחו כי $f(2)=8$ .

**2)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת $|f'(x)|\le 7$.
ידוע כי $f(4)=18$ , $f(1)=3$ .
הוכיחו כי $4\le f(2)\le 10$ .

**3)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$, ונניח ש- $f(a)=f(b)=0$ ,
וכן שקיימת נקודה $c$, כאשר $c\in(a,b)$, כך ש- $f(c)>0$ .
הוכיחו שקיימת נקודה $m$ בקטע $(a,b)$, כך ש- $f''(m)<0$ .

**4)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $(a,b)$, כך ש- $f'$ חסומה בקטע $(a,b)$.
א. הוכיחו שקיים $M>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$ מתקיים:
$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|$.
ב. הוכיחו ש- $f$ רציפה במידה שווה ב- $(a,b)$.
כלומר, הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$,
המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

**5)** נניח כי $f$ רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$.
כמו כן, $f(0)=0$ , ו- $f'$ מונוטונית עולה.
א. הוכיחו כי $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$ ב- $(0,\infty)$.
ב. הוכיחו כי $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,\infty)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** תהיינה $f,g$ פונקציות רציפות ב- $[a,\infty)$ וגזירות ב- $(a,\infty)$.
נתון כי $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x>a$.
הוכיחו כי $f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

**7)** נניח כי $f$ גזירה ב- $(0,\infty)$.

א. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$.

ב. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

**8)** תהי $f$ פונקציה גזירה לכל $x$.
הוכח:

א. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיימים, אז הם שווים זה לזה.

ב. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=L$ אז $L=0$ (ללא שימוש בכלל לופיטל).

ג. ייתכן שהגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים אבל הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ לא קיים.

ד. אם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ קיים אז גם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.

ה. אם $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)<0\right)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty\right)$.

הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

**9)** נניח כי $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$.
האם נכון לומר כי מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$?
הוכיחו או הפריכו.
הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז',
הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

**10)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים לכל היותר $c$ אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c$.

**11)** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x)<0$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים בדיוק $c$ אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^2$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב-$[a,b]$.

הוכיחו שקיימים $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$, כך ש-$c_2\neq c_3$ ו-$f'(c_1)=\frac{f'(c_2)+f'(c_3)}{2}$.

**13)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0,f(0))$ ו-$(1,f(1))$,

חותך את הגרף של $f$ בנקודה $(a,f(a))$, כאשר $0<a<1$.

הוכיחו שקיים $x_0\in[0,1]$, כך ש-$f''(x_0)=0$.

**14)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח ש-$f$ גזירה ב-$(a,b)$ ו-$\lim_{x\to a^+}f'(x)=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f'_+(a)$ קיים וש-$f'_+(a)=L$.

**15)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0)=0$.

נניח שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\le|f(x)|$.

הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**16)** נתון כי $f$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$.

א. ידוע כי $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f$ קבועה ב-$[a,b]$.

ב. ידוע כי $f'(x)=m$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f$ לינארית ב-$[a,b]$.

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי $f,g$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע $(a,b)$.

ידוע כי $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f(x)=g(x)+c$ ב-$[a,b]$.

ב. הוכיחו כי $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$.

**18)** נתון כי $f$ גזירה בקטע $(a,b)$ ו-$\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty$.

א. הוכח כי $f'$ לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח $f'$ שואפת ל-$\infty$ או $-\infty$?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**8)** ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©