אנליזה למדעי הנתונים

פרק 14 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז'

תוכן העניינים

משפט רול

שאלות

1) בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\qquad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\qquad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

2) נתון ש- $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה c, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0,x_1,x_2, עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכיחו שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

4) תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

הוכיחו שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

5) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראו שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

6) נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

7) נתונה פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$.
תהי g מוגדרת על ידי $g(x)=(x^2-1)f(x)$.
הראו כי g גזירה ב- $\mathbb{R}$, והוכיחו כי הנגזרת, g',
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$.

8) הוכיחו:
אם f גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$, גזירה ב- $\mathbb{R}$, וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$.

9) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$.
הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $2\dfrac{f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

10) אם $c_0+\dfrac{c_1}{2}+\ldots+\dfrac{c_{n-1}}{n}+\dfrac{c_n}{n+1}=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$,
הוכיחו שלמשוואה $c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$.

11) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$.
הראו שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$.

12) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\ne g'(x)f(x)$.
הראו שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(0)>0,\ f'(1)>0$.
א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$.

14) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל n טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.

הוכיחו שקיים n טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

15) תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל n טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(1)$.

16) נתון כי f,g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.

A קבוע כלשהו.

17) נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.

תהי x_0 נקודה כלשהי.

הוכיחו כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפת אחת ויחידה - x_0 .

במילים אחרות : הוכיחו כי הגרף של $y=f(x)$ נמצאו כולו מעל המשיק או מתחתיו.

18) נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a,b), ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.

תנו דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

19) נתון כי $f(x),\ g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) .

נתון בנוסף כי $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$.

הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=g'(c)$.

20) הפונקציות f ו- g רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b).
ידוע כי $f(a)\ge g(a)$ ו- $f'(x)>g'(x)$ ב- (a,b).
הוכיחו כי $f(x)>g(x)$ ב- $(a,b]$.

תשובות סופיות

1) א. כן, $1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

14) א. 0 ב. שאלת הוכחה.

15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $$\frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a}\qquad (0<a<b)$$

2) $$\frac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\frac{b-a}{2\sqrt{a}}\qquad (0<a<b)$$

3) $$(a-b)e^{-a}<e^{-b}-e^{-a}<(a-b)e^{-b}\qquad (a<b)$$

4) $$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b}\qquad \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$$

5) $$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}\qquad (0<a<b)$$

6) $$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}\qquad (0<a<b<1)$$

7) $$\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}}<\frac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a}<\frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}}\qquad (0<a<b)$$

8) $$\frac{b-a}{1-a^2}<\operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a)<\frac{b-a}{1-b^2}\qquad (0<a<b<1)$$

9) $\sqrt[n]{b}\cdot\dfrac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\dfrac{b-a}{n\cdot a}\quad(0<a<b)$

10) $\dfrac{2a(b-a)}{a^2+1}<\ln\left(\dfrac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\dfrac{2b(b-a)}{b^2+1}\quad(1<a<b)$

11) $\ln b-\ln a+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\le\dfrac{1}{4}(b-a)\quad(1<a<b<3)$

12) $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|\quad(x_1<x_2)$

13) $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|\quad(x_1<x_2)$

14) $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|\quad(x<y)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $x<\tan x<\dfrac{x}{\cos^2 x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

2) $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$ $(x>0)$

3) $x<\arcsin x<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$

4) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\operatorname{arcsinh}(x)<x$ $(x>0)$

5) $x<\operatorname{arctanh}(x)<\dfrac{x}{1-x^2}$ $(0<x<1)$

6) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$

7) $1+x<e^x<1+xe^x$ $(x>0)$

8) $\sin x\le x$ $(x>0)$

9) $\tan x<4x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{3}\right)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{1}{3}<\ln\left(\frac{3}{2}\right)<\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}+1<\sqrt{2}<1.5$

3) $\frac{3}{25}+\frac{\pi}{4}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{15}+\frac{\pi}{6}<\arcsin\left(0.6\right)<\frac{1}{8}+\frac{\pi}{6}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – שאלות כלליות

שאלות

1) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)| \le 5$.
ידוע כי $f(4)=18$, $f(1)=3$.
הוכיחו כי $f(2)=8$.

2) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)| \le 7$.
ידוע כי $f(4)=18$, $f(1)=3$.
הוכיחו כי $4 \le f(2) \le 10$.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$, ונניח ש- $f(a)=f(b)=0$,
וכן שקיימת נקודה c, כאשר $c \in (a,b)$, כך ש- $f(c)>0$.
הוכיחו שקיימת נקודה m בקטע (a,b), כך ש- $f''(m)<0$.

4) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b), כך ש- f' חסומה בקטע (a,b).
א. הוכיחו שקיים $M>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b) מתקיים:
$|f(y)-f(x)| \le M|y-x|$.
ב. הוכיחו ש- f רציפה במידה שווה ב- (a,b).
כלומר, הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b),
המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

5) נניח כי f רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$.
כמו כן, $f(0)=0$, ו- f' מונוטונית עולה.
א. הוכיחו כי $f'(x)>\frac{f(x)}{x}$ ב- $(0,\infty)$.
ב. הוכיחו כי $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,\infty)$.

6) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב- $[a,\infty)$ וגזירות ב- (a,∞).
נתון כי $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x>a$.
הוכיחו כי $f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

7) נניח כי f גזירה ב- $(0,\infty)$.
א. נתון כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.
הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$.
ב. נתון כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)>0$.
הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

8) תהי f פונקציה גזירה לכל x.
הוכח:
א. אם הגבולות $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיימים, אז הם שווים זה לזה.
ב. אם $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=L$ אז $L=0$ (ללא שימוש בכלל לופיטל).
ג. ייתכן שהגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים אבל הגבול $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ לא קיים.
ד. אם הגבול $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ קיים אז גם הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.
ה. אם $\lim_{x\to\infty} f'(x)>0$ $\left(\lim_{x\to\infty} f'(x)<0\right)$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty\right)$.
הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

9) נניח כי f גזירה ב- $\mathbb{R}$.
האם נכון לומר כי מתקיים $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$?
הוכיחו או הפריכו.
הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז',
הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

10) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים לכל היותר c אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c$.

11) תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x)<0$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים בדיוק c אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^2$.

12) תהי f פונקציה גזירה ב-$[a,b]$.

הוכיחו שקיימים $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$, כך ש-$c_2\neq c_3$ ו-$f'(c_1)=\frac{f'(c_2)+f'(c_3)}{2}$.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0,f(0))$ ו-$(1,f(1))$,

חותך את הגרף של f בנקודה $(a,f(a))$, כאשר $0<a<1$.

הוכיחו שקיים $x_0\in[0,1]$, כך ש-$f''(x_0)=0$.

14) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח ש-f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f'_+(a)$ קיים וש-$f'_+(a)=L$.

15) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0)=0$.

נניח שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\leq|f(x)|$.

הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

16) נתון כי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b).

א. ידוע כי $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי f קבועה ב-$[a,b]$.

ב. ידוע כי $f'(x)=m$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי f לינארית ב-$[a,b]$.

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי f,g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b).

ידוע כי $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f(x)=g(x)+c$ ב-$[a,b]$.

ב. הוכיחו כי $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$.

18) נתון כי f גזירה בקטע (a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$.

א. הוכח כי f' לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח f' שואפת ל-∞ או $-\infty$?

תשובות סופיות

8) ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il