

# מבוא מתמטי לפיזיקאים 1

פרק 8 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

1. המשיק ..... 1
2. בעיות משיקים ..... 3
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק ..... 5
4. הנורמל ..... 9
5. זווית שבין שתי עקומות ..... 10
6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם ..... 11

## המשיק

### שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה
  - א.  $f(x) = 2x^3 - 7x$  , בנקודה  $(2, 2)$ .
  - ב.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$  , בנקודה  $x = -2$ .
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$  , כאשר  $a > 0$ .
 

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$  , הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע  $a$ .
- (3) הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $h(x) = 3\sqrt{x}$ .
 

מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  , בנקודה  $(1, 15)$  , הוא  $21 \ln 3$ .
 

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  , בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  , הוא  $\frac{e}{3}$ .
 

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (6) לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$  , לגרף הפונקציה
 
$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$$

לכל ערך  $k$  כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .
  - א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות  $x = 1$  ו- $x = 3$ .
  - ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א', עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$ .

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(9) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ .

מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(10) פונקציה  $f(x)$  גזירה ברציפות ב-0 ומקיימת  $f(0) = 0$ .

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  היא  $30^\circ$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

(11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , בנקודות  $x=1$  ו- $x=0$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2)  $a = 2$

(3)  $(1, 3)$

(4)  $a = 2, b = -1$

(5)  $a = 2, b = -2$

(6) לערך  $k = 6$ , בנקודה  $x = 1$ ; לערך  $k = \frac{158}{27}$ , בנקודה  $x = \frac{1}{3}$ .

(7) א. ראו באתר. ב.  $\alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$

(8)  $x = 5, x = -1$

(9)  $x = 1, x = \frac{1}{3}$

(10)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(11)  $\alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$

## בעיות משיקים

### שאלות

(1) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ . מצאו את  $a$  ו- $c$ .

(4) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6)  $(2, -3), y = x^2 - 2x + 1$

(7)  $(-3, 1), y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(9) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו. מצאו את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

**10** נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$ .

א. הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = x^2 f(3x-2)$  גזירה לכל  $x$ .

ב. הישר  $2y = 10x + 11$  משיק לגרף הפונקציה  $z(x)$  בנקודה  $x = -1$ .

מצאו את השיפוע של  $f(x)$  בנקודה  $x = -5$ .

### תשובות סופיות

**1** נקודת ההשקה היא  $(-1, 5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .

**2** נקודת ההשקה היא  $(4, 12)$  ו-  $b = 4$ .

**3** נקודת ההשקה היא  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .

**4** נקודת ההשקה היא  $(0, 1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .

**5** משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .

**6**  $y = 6x - 15, (4, 9)$  ;  $y = -2x + 1, (0, 1)$

**7** המשיק  $(9, 3), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .

**8**  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

**9**  $k = 1.5$ , נקודת ההשקה  $(1, 1)$ .

**10** א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

## בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

### שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  , בנקודה  $x = -1$ .

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  , ששיפועו 2.

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  , בנקודה  $x = 0$ .

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  , בנקודה  $x_1 = 1$ .

(5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  , בנקודה  $y = 2$  , הוא -4 .  
מצאו את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  , היוצרים זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$  , ששיפועו -2.

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  ,  
בנקודה  $x_1 = 2$ .

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  , בנקודה  $(1,6)$  , הוא -6 .  
מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה  $y = e^{2x} + 3ex$  , והעבירו לה משיק בנקודה  $x = 2$  .  
מצאו את משוואת המשיק.

11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ , בנקודה  $x = 0$ .

12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ , בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .

13) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ . מצאו את משוואת המשיק.

14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$ , בנקודה  $x = 1$ .

15) הגרפים של  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - \ln x$  נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

16) מצאו את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .

17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה  $(1, 1)$ .

18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy+y} + x^2y = xy^2$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה  $(0, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(21)** נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

## תשובות סופיות

(1)  $y = 24x + 22$

(2)  $y = 2x - 3$

(3)  $y = 1$

(4)  $y = -12x + 9$

(5)  $a = 2, y = -4x - 2$

(6)  $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(7)  $y = -2x + 8$

(8)  $y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16}$

(9)  $a = 6, b = 2, y = -6x + 12$

(10)  $y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4$

(11)  $y = 3x + 1$

(12)  $y = (-e^2 + e)x + e^2, y = (e - 1)x + e$

(13)  $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(14)  $y = (\ln 2 + 1)x - 1$

(15)  $y = \frac{1}{e}x$

(16)  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

(17)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(18)  $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5}$

(19)  $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6}$

(20)  $y = \frac{4}{3}x + 2$

(21) א.  $(0,0), (1,0)$  ב. בראשית הצירים:  $y = -x$ , המשוואה השנייה:  $y = x - 1$ .

## הנורמל

### שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2x-2}$ , בנקודה  $(3, 2)$ .
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות  $(5, 0)$  ו- $(2, 4)$ .
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , בנקודה מסוימת, היא  $4y + x = 6$ . מצאו את הנקודה.

### תשובות סופיות

- (1)  $y = -2x + 8$
- (2)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3)  $(2, 1)$

## זווית שבין שתי עקומות

### שאלות

(1) מצאו את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו-  $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .

(2) מצאו את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .

(3) הוכיחו שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

### תשובות סופיות

(1)  $71.57^\circ$

(2)  $71.56^\circ$

(3) שאלת הוכחה.

## נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

### שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

### תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \approx 2.25, \sqrt{8} \approx 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \approx 1, \sqrt[3]{9} \approx 2\frac{1}{12} \quad (2)$$