

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 5 - משוואת פואסון ולפלאס מצומצם

תוכן העניינים

1. משוואת פואסון ולפלאס 1

משוואת פואסון ולפס:

סיכום כללי:

משוואת פואסון:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

משוואת לפס:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 0$$

הלפלאסיאן של פונקציה סקלרית f כתלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

גליליות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

כדוריות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

כאשר φ היא הזווית עם ציר z לפעמים מסמנים את הלפלאסיאן גם ב- Δf .

שאלות:

(1) דוגמה – שתי קליפות

- נתונות שתי קליפות כדוריות בעלות מרכז משותף ברדיוסים a ו- b ($a < b$). נתון כי הקליפה הפנימית מוארקת והחיצונית מוחזקת בפוטנציאל V .
- רשמו את משוואת לפס לכל תחום.
 - פתרו את המשוואה, השתמשו בתנאי השפה ומצאו את הפוטנציאל בכל תחום.
 - מהי התפלגות המטען על הקליפה המוארקת?

תשובות:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ -\frac{abV}{r(b-a)} + \frac{bV}{b-a} & a < r < b \\ \frac{bV}{r} & b < r \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\sigma(a) = \frac{-\varepsilon_0 bV}{a(b-a)} \quad \text{ג.}$$