שדות אלקטרומגנטיים 141035

פרק 9 - משוואת לאפלס - בעיות שפה בקואורדינטות גליליות

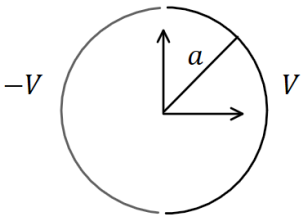
תוכן העניינים

1. הסבר ותרגילים 1

הסבר ותרגילים:

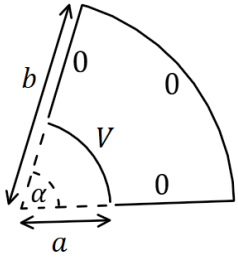
שאלות:

1) גליל חצי חצי



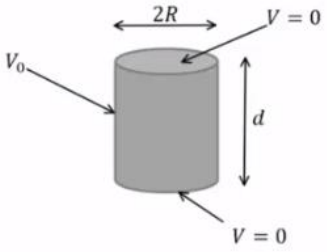
גליל דק ואינסופי ברדיוס a מחולק לשני חצאים.
החצי הימני מוחזק בפוטנציאל קבוע V והחצי השמאלי ב-$-V$.
מצא את הפוטנציאל בתוך ומחוץ לגליל.

2) גזרה בזווית אלפה



נתונה גזרה בזווית α מתוך מעגל.
הרדיוס הפנימי של הגזרה הוא a והחיצוני b.
הדופן ב-$r = a$ מוחזקת בפוטנציאל V וכל שאר הדפנות מוארקות.
מצא את הפוטנציאל בתוך הגזרה בלבד.
הנח שהבעיה דו ממדית.

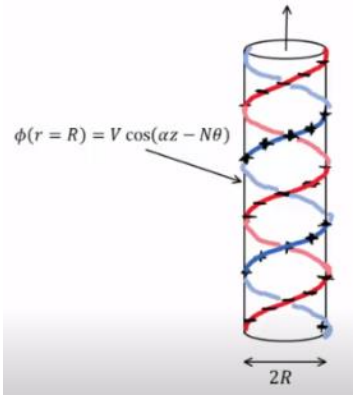
3) גליל סופי מתאפס בבסיסים



נתונה קליפה גלילית באורך d ורדיוס R.
נתון שהפוטנציאל בשני הבסיסים הוא אפס ובדופן העגולה הפוטנציאל הוא V_0.
מצא את פונקציית הפוטנציאל בתוך הגליל.

4) מולקולת DNA

מבנה ספירלי של דיפולים זעירים יוצר על שפת גליל שרדיוסו R פילוג פוטנציאל הנתון על ידי: $\phi(r=R)=V\cos(\alpha z - N\theta)$.
כאשר המספר השלם N והקבועים V ו- α נתונים.
המערכת אינסופית בציר z ומתוארת באיור עבור $N=1$.



א. רשמו את תנאי השפה לפוטנציאל בכל המרחב.
ב. מצאו את הפוטנציאל החשמלי בכל המרחב.
ג. מהו מרחק הדעיכה האופייני של השדה החשמלי מחוץ לספירלות?
ד. מהי צפיפות המטען המשטחית על המעטפת?

ה. המבנה הוא חלק ממודל של מולקולת DNA.
מבחינה חשמלית מולקולת DNA מורכבת מזוג סלילים כבציור כאשר שניהם בעלי מטען שלילי.
מודל פשוט למבנה זה מתקבל על ידי הוספת פילוג מטען משטחי שלילי אחיד $-\eta_0$ למעטפת הגלילית של הבעיה בסעיפים הקודמים עם $N=2$,
וכך שבכל נקודה על המעטפת המטען המשטחי החדש יהיה שלילי או אפס.
מהו הערך המינימלי של η_0 המבטיח שלא יהיה מטען חיובי במקרה זה?
מצאו את השדה של המערכת בתוספת צפיפות מטען זו.

תשובות סופיות:

1) $V(r,\theta)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4V}{\pi l}\left(\frac{a}{r}\right)^{l}\cos(l\theta)\quad ,r>a\ ,\ V(r,\theta)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4V}{\pi l a^{l}}r^{l}\cos(l\theta)\quad ,r<a$.

2) $V(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4V}{\pi m K_n}\left(\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}+\left(\frac{b}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\theta\right)\quad ,K_n=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}$.

3) $V(r,z)=\sum_{n}\frac{4V_0}{\pi n I_0\left(\frac{\pi n R}{\alpha}\right)}I_0\left(\frac{\pi n}{d}r\right)\sin\left(\frac{\pi n}{d}z\right)\ ,K_n=\frac{\pi n}{d}$.

4) א. לא מתבדר $\phi_1(r=0)\neq\infty\ ,\ \phi_1(r>R)=\phi_2(R)\ ,\ \phi_2(r=\infty)=$.

ב. $\phi_1=\frac{V}{I_N(\alpha R)}I_N(\alpha r)\cos(\alpha z-N\theta)\ ,\ \phi_2=\frac{V}{K_N(\alpha R)}K_N(\alpha r)\cos(\alpha z-N\theta)$.

ג. $\frac{1}{\alpha}$.

ד. $\eta=\varepsilon_0 V\alpha\cdot C\cdot\cos(\alpha z-N\theta)$.

ה. $\vec{E}=\begin{cases}-\vec{\nabla}\theta_1 & r<R\\ -\vec{\Delta}\theta_2 & R<r\end{cases}\ ,\ \eta_0=\varepsilon_0 V\alpha C$