שדות אלקטרומגנטיים

פרק 11 - משוואת הרציפות

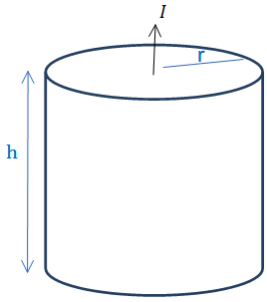
תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 1

הרצאות ותרגילים:

שאלות:

1) נוסחה לחישוב התנגדות ודוגמה עבור נגד גלילי



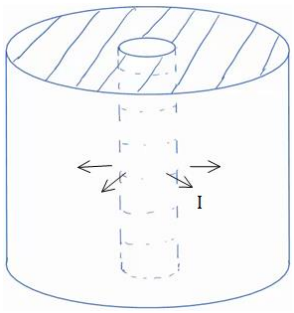
גליל מלא בעל רדיוס r וגובה h עשוי מחומר בעל התנגדות סגולית משתנה $\rho = \rho_0 \frac{z}{h}$ כאשר ρ_0 נתון ו-z הוא המרחק מבסיס הגליל.

א. חשב את ההתנגדות השקולה.
נתון שהזרם עובר בין הבסיסים (לאורך z)
מחברים את הגליל למקור מתח נתון V_0
(המתח הוא בין בסיס אחד לבסיס שני).

ב. מצא את הזרם הכולל בגליל.

ג. מצא את צפיפות הזרם והשדה החשמלי בגליל (פתרון בסרטון הבא).

2) זרם רדיאלי



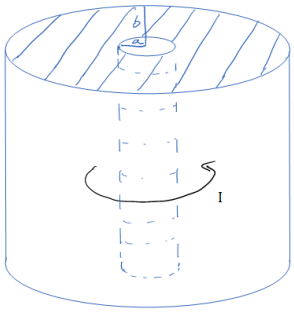
קליפה גלילית עבה עם רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b מלאה בחומר בעל התנגדות סגולית ρ אחידה ונתונה.

א. מצא את ההתנגדות השקולה של הקליפה אם הזרם זורם בכיוון הרדיאלי.

ב. מחברים מקור מתח V_0 בין המעטפת הפנימית למעטפת החיצונית של הקליפה.
מצא את צפיפות הזרם בקליפה.

ג. מצא את השדה החשמלי בתוך הקליפה.

3) זרם מעגלי בגליל



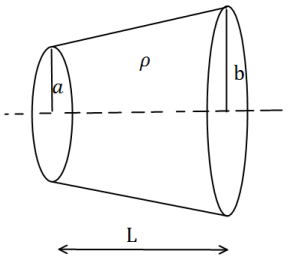
קליפה גלילית עבה עם רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b מלאה בחומר בעל התנגדות סגולית ρ אחידה ונתונה.

א. מצא את ההתנגדות השקולה של הקליפה אם הזרם זורם בכיוון טטה (ז"א זרם מעגלי).

ב. נתון הזרם הכולל הזורם בנגד.
מצא את הצפיפות כתלות במרחק ממרכז הנגד.

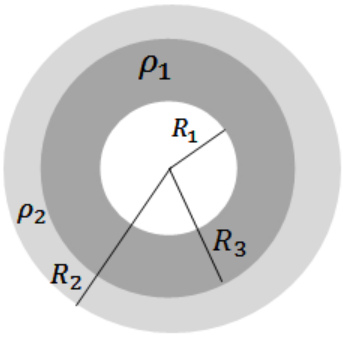
ג. מצא את השדה החשמלי בתוך הקליפה.

4) חרוט קטום



נתון חרוט קטום שאורכו L, רדיוס בסיסו הקטן a ורדיוס בסיסו הגדול b.
בין שני הבסיסים נתון הפרש פוטנציאלים.
ההתנגדות הסגולית של החרוט היא ρ.
חשבו את ההתנגדות השקולה של החרוט.

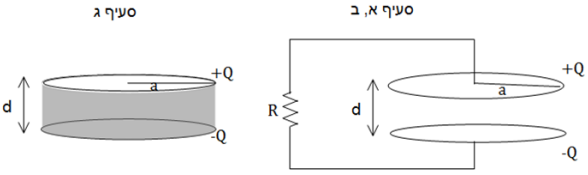
5) נגד כדורי מחולק לשני חומרים שונים



נגד בצורת קליפה כדורית בעלת רדיוס פנימי R_1 ורדיוס חיצוני R_2 מורכב מחומר בעל התנגדות סגולית ρ_1 בתחום $R_1 < r < R_3$ $(R_3 < R_2)$ והתנגדות סגולית ρ_2 בתחום $R_3 < r < R_2$.

א. מצא את ההתנגדות השקולה של הקליפה (זרם בכיוון רדיאלי).
ב. מצא את צפיפות הזרם בנגד אם נתון שמחברים את הנגד למקור מתח קבוע V.
ג. מהו השדה החשמלי בנגד?
ד. מצא את התפלגות המטען (משטחית ונפחית) בקליפה.

6) צפיפות זרם בתוך לוח של קבל לוחות



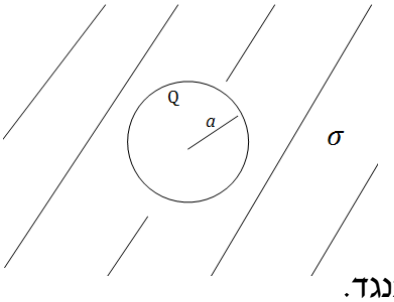
קבל לוחות עגולים טעון במטען Q ומחובר לנגד. רדיוס הלוחות הוא a והמרחק בין הלוחות הוא $d \ll a$, התנגדות הנגד היא R.

א. מצא את הזרם במעגל.
ב. מצא את צפיפות הזרם על פני לוח הקבל.

הדרכה: הנח כי צפיפות המטען על הקבל תמיד אחידה.
חשב את הזרם שיוצא מחלק הלוח בין r כלשהו ל-a.
חשוב איזו סוג של צפיפות ישנה על הלוח.
מצא את הצפיפות ע"י חלוקה של הזרם בחתך.

ג. בסעיף זה הנגד לא קיים, במקומו ממלאים את הקבל בחומר בעל התנגדות סגולית ρ אחידה. חזור על סעיפים א' ו-ב'.

7) קליפה טעונה מוליכה בתוך נגד

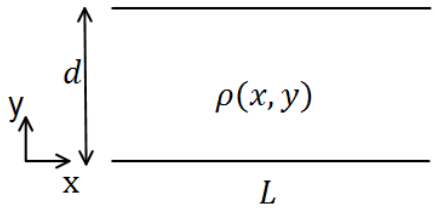


קליפה מוליכה (מוליכות אידיאלית) ברדיוס a
נמצאת בתוך חומר אינסופי עם מוליכות סגולית σ.
נתון כי המטען על הקליפה ב-$t=0$ הוא Q.

א. מצא את המטען על הקליפה כפונקציה של הזמן.

ב. מצא את צפיפות הזרם ואת השדה החשמלי בנגד.

8) התנגדות תלויה באורך וברוחב

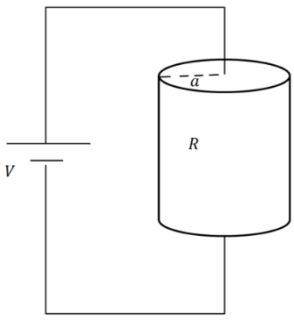


נתונים שני לוחות מקבילים בעלי
ממדים $L \times L$, המרוחקים זה מזה
מרחק d, אשר ביניהם הפרש פוטנציאלים
$(L \gg d)$.
בין שני הלוחות ישנו חומר מוליך בעל
התנגדות סגולית $\rho(x,y)$.
חשבו את ההתנגדות בשני המקרים הבאים:

א. $\rho = \rho_0 \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right)$.

ב. $\rho = \rho_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{d}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$.

9) צפיפות זרם בנגד גלילי



נגד גלילי בעל רדיוס a והתנגדות R מחובר למקור מתח V.

א. מצא את צפיפות הזרם הנפחית בנגד.

ב. מהי צפיפות הזרם המשטחית על הבסיס העליון?

ג. מהי צפיפות הזרם המשטחית על הבסיס התחתון?

10) אנטנת דיפול

התפלגות הזרם בתיל נתונה לפי:

$$I(x,t) = \begin{cases} I_0 \cos(\omega t) & |x| < \frac{b}{2} \\ 0 & |x| > \frac{b}{2} \end{cases}$$

כאשר: I_0, ω, b קבועים נתונים.
מצא את התפלגות המטען ליחידת אורך במרחב.

11) צפיפות זרם ברגע נתון

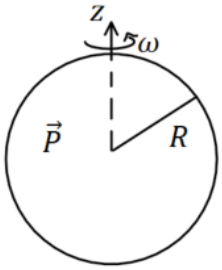
צפיפות הזרם ברגע מסוים נתונה ע"י הנוסחה: $\vec{j} = \alpha\left(x^3\hat{x} + y^3\hat{y} + z^3\hat{z}\right)$
כאשר α קבועה וחיובית.

א. מהן היחידות של α?

ב. באותו הרגע, מהו קצב השינוי בצפיפות המטען בנקודה $(1,-3,4)$?

ג. נסמן את סך המטען בתוך כדור ברדיוס R שמרכזו בראשית הצירים ב-Q.
מצא את $\frac{dQ}{dt}$. האם Q גדל, קטן או נשאר קבוע?

12) כדור מקוטב מסתובב



כדור שרדיוסו R מלא בחומר דיאלקטרי בקיטוב
אחיד: $\vec{P} = P_0\hat{z}$. הכדור מסתובב סביב ציר ה-z
במהירות זוויתית קבועה ω.
הנח שהקיטוב אינו משתנה בעקבות הסיבוב.

א. מצא את צפיפות הזרם של המטענים הקשורים.

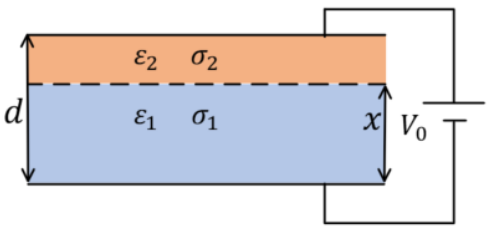
ב. צייר גרף של צפיפות הזרם כפונקציה של הקואורדינטות המתאימות.

ג. מה סך הזרם שעובר דרך חצי עיגול ברדיוס R שבסיסו על ציר ה z?

13) צפיפות זרם בכדור מוליך עם לאפלס בכדוריות

כדור מוליך ברדיוס a עשוי מחומר בעל מוליכות אחידה σ.
שפת הכדור מוחזקת בפוטנציאל: $V(a) = V_0\cos\varphi$.
כאשר φ היא הזווית עם ציר ה z.
מצא את צפיפות הזרם בתוך הכדור.

14) קבל עם שני חומרים דיאלקטריים מוליכים



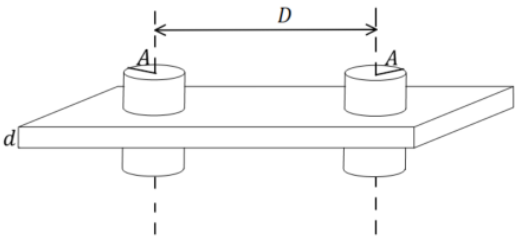
קבל לוחות מלבני בעובי d מלא בשני חומרים דיאלקטרים מוליכים.
חומר אחד בעל מקדם דיאלקטרי ε_1 ומוליכות σ_1 וחומר שני בעל מקדם דיאלקטרי ε_2 ומוליכות σ_2.
החומר הראשון ממלא את הקבל עד למרחק x מהלוח התחתון והחומר השני ממלא את שאר הקבל (ראה איור).
הקבל מחובר למקור מתח V_0, הנח שהזרם בתוך הקבל קבוע.

א. מצא את הפוטנציאל במרחק x מהלוח התחתון וביחס אליו.

ב. מצא את צפיפות המטען החופשי בין החומרים.

15) שתי אלקטרודות גליליות במישור דיאלקטרי מוליך

נתון לוח אינסופי העשוי מחומר דיאלקטרי-מוליך אחיד שפאותיו מקבילות ועוביו d.



מוליכות המישור היא σ.
נתונים גם שני גלילים מתכתיים, שניהם בעלי רדיוס A וצירים מקבילים.
המרחק בין צירי הגלילים הוא D.
הגלילים עוברים דרך הלוח הדיאלקטרי-מוליך כאשר צירים ניצבים לפאות הלוח.
מצא את הזרם שזורם בין הגלילים המתכתיים (המתארים בעצם שני אלקטרודות) במקרים הבאים, אם נתון שהפרש הפוטנציאלים ביניהם הוא V.

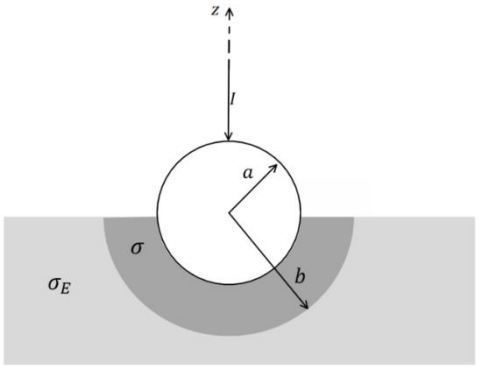
א. $A \ll D$.
ב. רדיוס הגלילים אינו קטן בהרבה מחצי המרחק בין הגלילים.
(בשביל סעיף זה צריך להכיר איך מוצאים פוטנציאל של שני גלילים מוליכים באמצעות שיטת השיקופים).

16) תיל בתחתית אגם

תיל ברדיוס A וארוך מאוד מונח בתחתית של אגם עמוק מאוד.
התיל מקביל לקרקע של האגם ומרכז התיל נמצא במרחק H ממנו.
הניחו שתחתית האגם היא מישור מוליך בעל מוליכות טובה מאוד ומוליכות המים היא σ.
מצאו את ההתנגדות בין התיל לתחתית האגם עבור יחידת אורך של התיל.

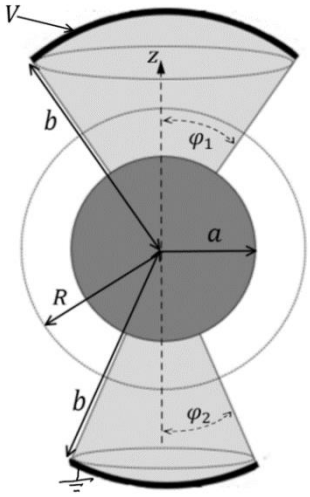
17) הארקה דרך כדור שקוע בקרקע

הארקה מחוברת לקרקע באופן הבא.
חוט מוביל זרם I לתוך כדור מוליך מושלם ברדיוס a. הכדור שקוע בקרקע עד קו המשווה שלו. סמוך לשפת הכדור נוצרת שכבה שעוביה $b-a$ בעלת מוליכות σ.
המוליכות של האדמה היא σ_E.



א. רשמו את תנאי השפה לפוטנציאל האלקטרוסטטי באדמה ובשכבה מסביב לכדור.
ב. חשבו את פונקציית הפוטנציאל באזורים הנ"ל.
ג. מצאו את ההתנגדות של האדמה כולל השכבה.
ד. מהי צפיפות הזרם המשטחית על שפת הכדור (מעל המשווה ומתחת)?

18) כדור ושתי גזרות



המבנה באיור עשוי מהחלקים הבאים:
גזרה כדורית עליונה
בתחום: $0 \le \varphi \le \varphi_1, 0 \le \theta \le 2\pi$,
$a \le r \le b$ העשויה מחומר בעל מוליכות σ.
כדור מרכזי ברדיוס a עשוי מוליך מושלם
וגזרה כדורית תחתונה
בתחום: $0 \le \varphi \le \varphi_2, a \le r \le b\ 0 \le \theta \le 2\pi$,
בעלת מוליכות σ גם כן.
על פני הגזרה העליונה מונח משטח כדורי עשוי
מוליך מושלם ברדיוס $r = b$ המחובר לפוטנציאל V.
באותו האופן מונח משטח כדורי על פני הגזרה התחתונה
עשוי מוליך מושלם ומוארק.
המשטחים מתוארים בקו העבה באיור.

א. הניחו כי צפיפויות הזרם הנפחיות בגזרה העליונה והתחתונה הן: $\vec{J}_1$ ו-$\vec{J}_2$
ורשמו את חוק שימור המטען, בצורתו האינטגרלית, על מעטפת כדורית
ברדיוס R (מסומנת במקווקו באיור).

ב. הראו כי בתוך המוליכים הסופיים הפוטנציאל מקיים את משוואת
לאפלס ורשמו את תנאי השפה לפוטנציאל.

ג. מצאו את הפוטנציאל וחשבו את השדה החשמלי בתוך המבנה ואת
צפיפות הזרם המתאימה.

ד. השתמשו בחוק אמפר האינטגרלי וחשבו את $\vec{H}$ בגזרה העליונה.
הניחו כי השדה בכיוון $\hat{\theta}$ בלבד.

ה. הראו כי משפט פויינטינג מתקיים בגזרה העליונה.

תשובות סופיות:

1) א. $R_T=\frac{\rho_0 h}{2\pi r^2}$. ב. $I=\frac{V_0}{R_T}$. ג. $\vec{J}=\frac{I}{\pi r^2}\hat{z}$, $E=\rho_0\frac{z}{h}\frac{I}{\pi r^2}\hat{z}$.

2) א. $R_T=\frac{\rho}{2\pi h}\ln\frac{b}{a}$. ב. $\vec{J}=\frac{V_0}{R_T 2\pi rh}\hat{r}$. ג. $E=\frac{\rho V_0}{R_T 2\pi rh}\hat{r}$.

3) א. $R_T=\frac{1}{\frac{h}{2\pi\rho}\ln\frac{b}{a}}$. ב. $\vec{J}=\frac{V_T}{\rho 2\pi r}\hat{\theta}$. ג. $\vec{E}=\rho\cdot\vec{J}$.

4) $R=\frac{\rho L}{\pi ab}$.

5) א. $R_T=\frac{\rho_1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{\rho_2}{4\pi}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)$. ב. $\vec{J}_{(r)}=\frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$.

ג. $\vec{E}=\begin{cases}\rho_1\frac{I}{4\pi r^2}\hat{r} & R_1<r<R_3\\ \rho_2\frac{I}{4\pi r^2}\hat{r} & R_3<r<R_2\end{cases}$.

ד. $\tilde{\sigma}_{(R_2)}=-\varepsilon_0\frac{I}{4\pi R_2^2}\rho_2$, $\tilde{\sigma}_{(R_3)}=\frac{I\varepsilon_0}{4\pi R_3^2}(\rho_2-\rho_1)$, $\tilde{\sigma}_{(R_1)}=\varepsilon_0\rho_1\frac{I}{4\pi R_1^2}-0$, $\tilde{\rho}=0$.

6) א. $I=\frac{Q}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$. ב. $k=\frac{a^2-r^2}{2\pi ra^2}\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$.

ג. $I=\frac{Q}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$, $k=0!$, $\vec{J}=\frac{I}{\pi a^2}\hat{z}$.

7) א. $q(t)=Qe^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}$. ב. $\vec{E}=\frac{kq(t)}{r^2}\hat{r}$, $\vec{J}=\frac{\sigma q(t)}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\hat{r}$.

8) א. $R=\frac{2\rho_0 d}{\pi L^2}$. ב. $R_T=\frac{\rho_0 d}{L^2}$.

9) א. $J=\frac{V}{\pi a^2 R}$. ב. $K_r(r)=\frac{V}{2\pi a^2 R}\left(\frac{\alpha^2}{r}-r\right)$.

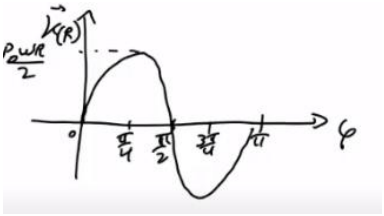
ג. $K_r(r)=-\frac{V}{2\pi a^2 R}\left(\frac{\alpha^2}{r}-r\right)$.

10) $\lambda(x,t)=\frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t)\left(\delta\left(\frac{b}{2}-x\right)-\delta\left(\frac{b}{2}+x\right)\right)$.

11) א. $\frac{A}{m^5}$. ב. $\frac{d\rho}{dt}=-78\alpha\cdot m^2$. ג. $\frac{dQ}{dt}=12\pi\alpha\cdot\frac{R^5}{5}$, המטען גדל.

12) א. $\vec{K}=\frac{1}{2}\rho_0\omega R\sin 2\varphi\hat{\theta}$.

ב. גרף:



ג. $I=0$.

13) $\vec{J}=-\frac{\sigma V_0}{a}\hat{z}$.

14) א. $\frac{\sigma_2 V_0\cdot x}{x(\sigma_2-\sigma_1)+\sigma_1 d}$.

ב. $\sigma_\rho=\frac{(\varepsilon_1\sigma_2-\varepsilon_2\sigma 1)V_0}{x(\sigma_2-\sigma_1)+\sigma_1 d}$.

15) א. $\frac{\pi\sigma dV}{\ln\frac{D-A}{A}}$.

ב. $\frac{\sigma\pi V}{\ln\left(\frac{D}{2A}+\sqrt{\left(\frac{D}{2A}\right)^2-1}\right)}$.

16) $R=\frac{\ln\left(\frac{H}{A}+\sqrt{\left(\frac{H}{A}\right)^2-1}\right)}{2\pi\sigma l}$.

17) א. ראה סרטון.

ב. $\phi_2=\frac{I}{2\pi\sigma_E r}$, $A_1=\frac{I}{2\pi b}\left(\frac{1}{\sigma_E}+\frac{1}{\sigma}\right)$, $\phi_1=A_1+\frac{I}{2\pi\sigma r}$.

ג. $R=\frac{1}{2\pi b}\left(\frac{1}{\sigma_E}-\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{1}{2\pi a\sigma}$.

ד. $K_\varphi=\frac{I}{2\pi a}\left(\frac{\cos\varphi+1}{\sin\varphi}\right)$.

18) א. $J_{1_r}(1-\cos\varphi_1)=-J_{2_r}(1-\cos\varphi_2)$.

ב. ראה סרטון.

ג. $\phi_1=A_1+\frac{B_1}{r}$, $\phi_2=A_2+\frac{B_2}{r}$, $B_1=-\frac{abKV}{(b-a)(1-K)}$, $A_1=V-\frac{aKV}{(b-a)(1-K)}$,

$K=\frac{1-\cos\varphi_2}{1-\cos\varphi_1}$, $B_2=\frac{abV}{(b-a)(1-K)}$, $A_2=-\frac{aV}{(b-a)(1-K)}$.

ד. $\vec{H}=\frac{\sigma B_1}{r}\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\hat{\theta}$.