

מתמטיקה לפיזיקאים 1

פרק 14 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה..... 1
2. פתרון משוואות פולינומיאליות..... 4
3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות..... 6

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4)$$

(5) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ונתון כי $b^2 < 3ac$. מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות 6-9, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

$$e^{x-1} = x \quad (6)$$

$$\arctan x - x = 0 \quad (7)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (8)$$

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (9)$$

(10) תהי f פונקציה גזירה לכל x , המקיימת: $f'(x) \leq 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. הוכיחו שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות 11-13 יש בדיוק שני פתרונות:

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (13) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (12) \quad e^x - 5x = 0 \quad (11)$$

בכל אחת מהמשוואות 14-17, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (14)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (15)$$

$$x + a \cos(bx) = 1 \quad (16)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (17)$$

(18) מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x + e^x = a$ כאשר a קבוע ממשי.

(19) הוכיחו שלמשוואה $2ax^3 + a^2 + x^2 = 0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר a קבוע ממשי.

(20) הוכיחו שלמשוואה $x^2 + x^3 + 5x = 1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.
הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

(21) נתון הפולינום $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + cx - 1$.

א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.

ב. נתון בנוסף כי $|c| < 1$.

מה מספר השורשים של הפולינום?

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) פתרון יחיד.
- (6) $x = 1$
- (7) $x = 0$
- (8) $x = -4$
- (9) $x = 0$
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) $b^2 - 4ac = 0$
- (15) $4b^2 - 12ac < 0$
- (16) $\frac{1}{ab} < -1, \frac{1}{ab} > 1$
- (17) $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$
- (18) אם $a = 0$, למשוואה אין פתרון. אם $a \neq 0$, למשוואה יש פתרון יחיד.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

פתרון משוואות פולינומיאליות

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות 1-3:

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

פתרו את המשוואות הבאות:

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (4)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (5)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (7)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (9)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (10)$$

$$7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (11)$$

תשובות סופיות

(1) $x^2 + 1$

(2) 0

(3) $4x + 9 + \frac{17}{x-2}$

(4) $k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 3, k_4 = -5$

(5) $k_1 = -4, k_{2,3} = 1 \pm 2i$

(6) $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = -1, k_5 = -1$

(7) $k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2$

(8) $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 1, k_6 = -1$

(9) $k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$

(10) $k_1 = 1, k_2 = 2, k_{3,4} = \pm 2i$

(11) פתרון מקורב: $x = 0.8459$.

שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה 2 בשיטת ניוטון-רפסון):

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (1)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{פתרון מדויק } x = -1$$

$$(2) \quad \text{פתרונות מקורבים: } x = 0.5576, \quad x = 1.9672$$