# חדו"א 1 מ

## פרק 15 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה..... 1
2. פתרון משוואות פולינומיאליות ..... 4
3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות..... 6

# מציאת מספר הפתרונות של משוואה

## שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

**1)** $x^3+4x-1=0$

**2)** $x^2=-\ln x$

**3)** $x-0.25\sin x=7$

**4)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

**5)** נתונה המשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$, ונתון כי $b^2<3ac$.
מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות **6-9**, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

**6)** $e^{x-1}=x$

**7)** $\arctan x-x=0$

**8)** $\ln(x+5)-4=x$

**9)** $x^2+x\sin x=1-\cos x$

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת: $f(0)=1,\ f(1)=2$, $f'(x)\le 1$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות **11-13** יש בדיוק שני פתרונות:

**11)** $e^x-5x=0$

**12)** $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

**13)** $1+4x^4=8x^3$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

בכל אחת מהמשוואות **14-17**, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

**14)** $ax^2+bx+c=0$

**15)** $ax^3+bx^2+cx+d=0$

**16)** $x+a\cos(bx)=1$

**17)** $(n>4,\ odd)\ ax^n+bx^{n-2}+cx^{n-4}-d=0$

**18)** מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x+e^x=a$ כאשר $a$ קבוע ממשי.

**19)** הוכיחו שלמשוואה $2ax^3+a^2+x^2=0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר $a$ קבוע ממשי.

**20)** הוכיחו שלמשוואה $x^2+x^3+5x=1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.

הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

**21)** נתון הפולינום $p(x)=3x^4-2x^3+x^2+cx-1$.

א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.

ב. נתון בנוסף כי $|c|<1$.

מה מספר השורשים של הפולינום?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) פתרון יחיד.
6) $x=1$
7) $x=0$
8) $x=-4$
9) $x=0$
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) $b^2-4ac=0$
15) $4b^2-12ac<0$
16) $\frac{1}{ab}<-1\,,\ \frac{1}{ab}>1$
17) $b^2(n-2)^2-4anc(n-4)<0$
18) אם $a=0$, למשוואה אין פתרון. אם $a\neq 0$, למשוואה יש פתרון יחיד.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פתרון משוואות פולינומיאליות

## שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות **1-3**:

**1)** $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

**2)** $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

**3)** $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

פתרו את המשוואות הבאות:

**4)** $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

**5)** $k^3+2k^2-3k+20=0$

**6)** $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

**7)** $k^3-6k^2+12k-8=0$

**8)** $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

**9)** $k^3-k^2+k-1=0$

**10)** $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

**11)** $7x^3-33x^2+21x+61=0$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $x^2+1$

2) $0$

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

5) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

6) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

7) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

8) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

9) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

10) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

11) פתרון מקורב: $x=0.8459$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה **2** בשיטת ניוטון-רפסון):

**1)** $1+4x^4=8x^3$

**2)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

## תשובות סופיות

**1)** פתרון מדויק $x=-1$.

**2)** פתרונות מקורבים: $x=1.9672$, $x=0.5576$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©