

אקונומטריקה ב

פרק 6 - משוואות סימולטניות

תוכן העניינים

1. כללי 1

משוואות סימולטניות:

רקע:

עוסקות בהפרת ההנחה של אי תלות בין המב"ת לטעויות בניבוי: $\text{cov}(x, u) = 0$.
 ה-Xים במשוואה נחשבו משתנים אקסוגניים – משפיעים על Y אך לא מושפעים ממנו בחזרה לעומת זאת משתנים אנדוגניים – משפיעים על Y אך גם מושפעים ממנו בחזרה. מאחר ומשתנים אלו הם גם מסבירים וגם מוסברים, הם נחשבים כמשתנים מקריים, המתואמים עם הטעויות במודל: $\text{cov}(x, u) \neq 0$.

משוואות המבנה (משוואות סימולטניות):

מערכת משוואות הכוללות משתנים מסבירים אנדוגניים ואקסוגניים.
 בד"כ מדובר בשתי משוואות אשר המשתנה המוסבר בראשונה הוא משתנה מסביר בשנייה והמשתנה המוסבר בשנייה הוא משתנה מסביר בראשונה.
 משתנים המופיעים באחת המשוואות כמוסברים ובאחרת כמסבירים הם משתנים אנדוגניים. יתר המשתנים במשוואות הם אקסוגניים.
 המטרה היא לאמוד בצורה יעילה את הפרמטרים (אלפות ובטות) ולבצע בדיקת השערות.

השלכות על אר"פ:

הנחת אי תלות בין המשתנה הב"ת והטעויות שימשה אותנו להוכחת ליניאריות, חוסר הטיה ועקיבות.
 לכן הפרתה משמעה פגיעה בכל תכונות אר"פ. האומדים לא ליניאריים, מוטים לא עקיבים ולכן גם לא יעילים (לפי גאוס מרקוב). אומד השונות מוטה גם הוא ובדיקת ההשערות לא תקפה (ללא תלות בגודל המדגם).

הצורה המצומצמת של מודל עם משוואות סימולטניות:

משוואות הצורה המצומצמת הן פתרון עבור המשתנים האנדוגניים במערכת:
 הגדרת המשתנים האנדוגניים כפונקציה של המשתנים האקסוגניים במערכת בלבד.
 מספר המשוואות המצומצמות הוא כמספר המשתנים האנדוגניים במערכת (במקרה זה שניים).

תכונות המשוואות מהצורה המצומצמת:

- מס' המשוואות הוא כמספר המשתנים האנדוגניים במערכת (X ו-Y).
- המשתנה המוסבר הוא אנדוגני וכל המסבירים אקסוגניים.
- המשתנים המסבירים הם זהים בכל המשוואות (ה-Zים).

- מכיוון שכל המשתנים המסבירים הם אקסוגניים ניתן לאמוד את הפרמטרים (ה- λ ות- μ ים) ב-OLS ולקבל אומדים ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים עם יכולת לבצע בדיקת השערות.

אמידת הפרמטרים של משוואות המבנה באמצעות משוואות הצורה המצומצמת : משוואות הצורה המצומצמת מאפשרות לאמוד את הפרמטרים בשיטת OLS אבל אנחנו מעוניינים למעשה לאמוד את הפרמטרים של המשוואות המקוריות – משוואות המבנה. מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת נחלץ את הפרמטרים של משוואות המבנה. בתהליך החילוץ של הפרמטרים המבניים ייתכנו 3 מצבים :

1. אין זיהוי : לא ניתן לחלץ את הפרמטרים המבניים מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת.
2. זיהוי מדויק : יש רק דרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבניים מהפרמטרים של הצורה המצומצמת.
3. זיהוי יתר : יש יותר מדרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבניים מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת.

בכדי להקל על בעיית הזיהוי מומלץ לאמץ את הכלל הבא :

עבור כל אחת מהמשוואות המבניות יש לחשב :

1. $g - 1$: מספר אנדוגניים במשוואה הספציפית פחות 1 ולהשוות עם :

2. $K - k$: מספר אקסוגניים סה"כ בשתי המשוואות כולל חותך (K) פחות מספר אקסוגניים במשוואה הספציפית כולל חותך (k).
אם : $2 = 1$ זיהוי מדויק ; $2 > 1$ זיהוי יתר ; $2 < 1$ אין זיהוי.

שיטות לפתרון משוואות סימולטניות:

1. שיטת ריבועים פחותים עקיפה (ILS) :
1. יש להציג את מערכת משוואות המבנה בצורתה המצומצמת.
2. יש לאמוד בשיטת OLS את הפרמטרים של המשוואות בצורה המצומצמת.
3. יש לחלץ מן הפרמטרים של המערכת המצומצמת את הפרמטרים של הצורה המבנית.

משום שתהליך החילוץ איננו ליניארי האומדים המבניים המתקבלים הם מוטים אך עקיבים.
כאשר הזיהוי מדויק האומדים יהיו גם אסימפטוטית יעילים (במדגמים גדולים).
כאשר הזיהוי הוא יתר : האומדים לא יהיו יעילים.

2. שיטת ריבועים פחותים בשני שלבים (2SLS):

א. אמידת משוואות הצורה המצומצמת בשיטת OLS ושימוש בתוצאות האמידה כדי לחשב את המשתנים האנדוגניים (המסבירים).

ב. הצבת המשתנים האנדוגניים שהתקבלו במשוואות המבנה ואמידתן ב-OLS.

אם משוואות המבנה מזוהות בדיוק או ביתר – האומדים שיתקבלו יהיו אמנם מוטים אבל עקיבים ויעילים אסימפטוטית. האומדים שיתקבלו יהיו זהים לאומדים שהתקבלו בשיטת הריבועים הפחותים העקיפה.
כאשר אין זיהוי : אין אקסוגניים ולכן אין משתנים מסבירים בצורה המצומצמת או שכל האקסוגניים בצורה המצומצמת כבר קיימים במשוואה המקורית ולכן החלפת x ב- $\hat{x}$ תיצור בעיה של מולטיקוליניאריות מלאה.

3. שיטת משתני העזר (IV):

משתנה עזר הוא משתנה שיחליף את המשתנה המסביר האנדוגני במשוואת המבנה ויעזור לאמוד את הקשר בינו לבין התלוי.
משתנה העזר צריך להיות :

1. משתנה אקסוגני או פונקציה ליניארית של משתנים אקסוגניים :

$$\text{cov}(Z, u) = 0$$

2. מתואם עם המשתנה האנדוגני אותו הוא מחליף : $\text{cov}(Z, X) \neq 0$.
ככל שהמתאם גבוה יותר, האומד שיתקבל באמצעותו יהיה טוב יותר.

הבעיה : אומדני OLS שיתקבלו יהיו מוטים, לא עקיבים ולא יעילים.
הפיתרון בשיטת IV : אמידת ההשפעה של Y על X עם משתנה אקסוגני שלא קיים במערכת שמתואם עם Y (אותו הוא מחליף) אך לא עם u .
אם יש יותר ממשתנה עזר אחד המקיימים את התנאים הנ"ל, האומדים שיתקבלו יהיו כולם מוטים אך עקיבים (ניתן להשתמש בהם במדגמים גדולים).

משתנה העזר היחיד שיניב אומד יעיל יהיה בעל המתאם הגבוה ביותר עם המשתנה האנדוגני אותו הוא בא להחליף. משתנה עזר זה יהיה אומדן לאנדוגני שהתקבל מאמידת משוואת הצורה המצומצמת בשלב הראשון של 2SLS.

משתנה לא יוכל לשמש כמשתנה עזר :
אם נוסחתו מכילה רק משתנים אקסוגניים המצויים במשוואת המבנה בה הוא משמש כמשתנה עזר, שכן אז תיווצר בעיית מולטיקוליניאריות מלאה.
במילים אחרות, נוסחת משתנה העזר צריכה להיות מורכבת מלפחות משתנה אקסוגני אחד שלא מופיע במשוואה כדי שהמשתנה יוכל לשמש כמשתנה עזר.

משתני עזר שונים יכולים להניב את אותם האומדים לפרמטרים :
נבדוק זאת בצורה הבאה : נמחק מהנוסחאות של משתני העזר את המשתנים האקסוגניים המופיעים במשוואה. אם נשארנו עם שני ביטויים שהם מכפלה אחד של השני, יתקבלו אותם האומדים.

סיכום תוצאות אמידה של משוואות סימולטניות :

מס' האומדים שיתקבלו בשלושת השיטות ותכונותיהם תלויים בזיהוי של המשוואה :
אם המשוואה לא מזוהה : לא ניתן להשתמש באף אחת מהשיטות.
כאשר המשוואה מזוהה (בדיוק או ביתר) : האומדים שיתקבלו בשלושת השיטות יהיו תמיד מוטים אך עקיבים.
תכונת היעילות ומס' האומדים האפשרי מסוכמים בטבלה הבאה :

מזוהה ביתר	מזוהה בדיוק	
יתכן יותר מאומד אחד לפרמטר לא יעילים	אומד אחד לפרמטר יעיל	שיטת ILS
אומדן אחד למשתנה האנדוגני יעיל		שיטת 2SLS
אינסוף משתני עזר אם משתנה העזר זהה לאומדן לאנדוגני המתקבל בשלב הראשון בשיטת 2SLS - הוא יהיה גם יעיל .		שיטת IV

כאשר הזיהוי מדויק יתקבל אותו אומד מוטה אך עקיב ויעיל בשלושת השיטות :
2SLS, ILS ו-IV (במידה ומשתנה העזר הוא $\hat{X}_t$ מהשלב הראשון של 2SLS).

משתנים בפיגור ומשוואות סימולטניות:

אם X_t אקסוגני אז גם המשתנים בפיגור X_{t-p} בוודאות אקסוגניים.

אם Y_t אנדוגני אז מעמדם של המשתנים בפיגור תלוי בקיומו של מתאם סדרתי:

אם יש מתאם סדרתי: $\text{cov}(Y_{t-1}, u_t) \neq 0$ אז: Y_{t-1} אנדוגני.

אם אין מתאם סדרתי: $\text{cov}(Y_{t-1}, u_t) = 0$ אז: Y_{t-1} אקסוגני.

שאלות:

שיטת IV:

(1) נתונות המשוואות הבאות:

$$1. Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot Z_{1t} + \alpha_3 \cdot Z_{2t} + \varepsilon_t$$

$$2. X_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot Y_t + \beta_2 \cdot Z_{1t} + \omega_t$$

נתון כי: X_t , Y_t משתנים אנדוגניים ו- Z_{1t} , Z_{2t} משתנים אקסוגניים.
חוו דעתכם על כל אחת מהטענות הבאות, והסבירו:

א. ניתן להשתמש ב- Z_{1t} כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 1.

ב. ניתן להשתמש ב- $\frac{Z_{1t} + Z_{2t}}{2}$ כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 2.

ג. יתכנו מספר אומדים עקיבים שונים זה מזה ל- β_2 במשוואה מס' 2.

ד. שימוש ב- Z_2 כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 2 יניב אומדים עקיבים וגם יעילים.

ה. משתנה העזר $Z_{1t} + 3Z_{2t}$ יניב אומדים זהים לאלו שהתקבלו בסעיף ב'.

הוכיחו את תשובתכם באמצעות המשוואות הנורמאליות של משוואה 2.

ו. משתנה העזר $3Z_{1t} + 5Z_{2t}$ יניב אותם אומדים כמו משתנה העזר בסעיף ד'.
הוכיחו את תשובתכם באמצעות המשוואות הנורמאליות של משוואה 2.

תרגיל מסכם:

(2) נתונות המשוואות הבאות:

$$1. Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Z_{1t} + \alpha_3 Z_{2t} + \alpha_4 Z_{3t} + \alpha_5 Z_{4t} + u_t$$

$$2. X_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Z_{1t} + \beta_3 Z_{2t} + \beta_4 Z_{5t} + v_t$$

נתון כי: $\text{cov}(Z_j, u_t) = 0$ עבור $j = 1, \dots, 5$ (כלומר ה- Z ים אקסוגניים).

א. אמידת כל אחת מהמשוואות תניב אומדים:

i. מוטים נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ii. עקיבים נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ב. משוואה 1 מוזהה בדיוק/מוזהה ביתר/בלתי מוזהה

משוואה 2 מוזהה בדיוק/מוזהה ביתר/בלתי מוזהה

ג. חווה דעתך על הטענות הבאות:

i. תוך שימוש בשיטת ILS

ניתן לאמוד את משוואה 1

באופן עקיב וחד ערכי: נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ii. תוך שימוש בשיטת ILS

ניתן לאמוד את משוואה 2

באופן עקיב וחד ערכי : נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ד. משוואות הצורה המצומצמת הן :

$$Y_t = \lambda_0 + \lambda_1 Z_{1t} + \lambda_2 Z_{2t} + \lambda_3 Z_{3t} + \lambda_4 Z_{4t} + \lambda_5 Z_{5t} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_t = \mu_0 + \mu_1 Z_{1t} + \mu_2 Z_{2t} + \mu_3 Z_{3t} + \mu_4 Z_{4t} + \mu_5 Z_{5t} + \varepsilon_{2t}$$

נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ה. אמידת משוואות הצורה המצומצמת ב-OLS תניב אומדים

חסרי הטיה, עקיבים ויעילים : נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

ו. להלן רשימה של משתני עזר פוטנציאליים :

i. Z_5

ii. $\frac{Z_1 + Z_5}{2}$

iii. $2Z_1 + 3Z_2 + Z_3$

iv. $Z_3 + Z_4$

v. $3Z_3 + 4Z_4$

vi. $3Z_3 + 3Z_4$

vii. Z_1

עבור כל משתנה רשום באיזה משוואה ניתן להשתמש בו אם בכלל.

ז. איזה מבין משתני העזר הבאים יניבו את אותם האומדים עבור אותה המשוואה (תתכן יותר מתשובה אחת נכונה) :

i. i-ii

ii. iv-iv

iii. v-iv

iv. iv-v

ח. האם משתנה עזר i (Z_5) יניב אומדים יעילים?

ט. אם ידוע כי אין מתאם סדרתי, האם X_{t-1} , Y_{t-1} הם אנדוגניים או אקסוגניים?

י. האם הוספה של משתנה אקזוגני נוסף למשוואה 1 תשנה את הזיהוי של משוואה 2?

יא. האם הוספה של משתנה אקסוגני נוסף למשוואה 2 תשנה את הזיהוי של משוואה 1?

יב. הנח כי הוטלו המגבלות הבאות על הפרמטרים המבניים : $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. האם ניתן כעת לזהות את יתר הפרמטרים במודל?

תשובות סופיות:

- (1) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. לא נכון.
ו. נכון.
- (2) א.i. נכון. ii. לא נכון.
ב. משוואה 1 : מזוהה בדיוק , משוואה 2 : מזוהה ביתר.
ג.i. נכון. ii. לא נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו.i. 1. ii. 2. iii. 2. iv. 2. v.
vii. 2. ז.i. נכון. ii. נכון. iii. לא נכון. iv. לא נכון.
ח. כן. ט. אקסוגניים. י. לא. יא. כן.
יב. משוואה 1 מזוהה בדיוק ומשוואה 2 מזוהה ביתר.