מתמטיקה לביולוגים א

פרק 18 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 1
3. משוואה הומוגנית 3
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 5
5. משוואה מדויקת 6
6. גורם אינטגרציה 8
7. משוואה לינארית מסדר ראשון 11
8. משוואת ברנולי 13

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $\left(x^2y-2+2x^2-y\right)dx-\left(xy^2-4-4x+y^2\right)dy=0$

7) $dy=2t\left(y^2+4\right)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \quad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2 $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3 $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4 $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5 $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6 $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7 $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8 $x=1+\tan\left(t+c\right)$

9 $y=-\frac{1}{\cos x}$

10 $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11 $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\frac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0\ ;\ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $-\ln|x|=\frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\,,\qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

2 $\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\,,\quad y=x,\ y=-3x$

3 $-\ln|x|=\ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c,\quad y=0$

4 $-\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c,\quad y=0,\quad y=-2x$

5 $\ln|x|=-\sin(y/x)+c$

6 $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c,\quad y=0$

7 $\ln x=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

8 $\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c,\quad x(t)=0,\quad x(t)=t$

9 $n=1,\quad \ln|x|=-\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln\left(2(x+y+1)+1\right)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ ,y=x-3\ ,\quad y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-\left(2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+\left(-2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

5) $\left(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראו שהמשוואה $\left(x+2\right)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתרו את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(xy\right)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y\left(1\right)=-1\ ;\qquad y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(y^4-4xy\right)dx+\left(2xy^3-3x^2\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.

כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $\left(5x^2+3y^3+2xy\right)dx+\left(3x^2+3xy^2+6y^3\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(x^2y^3\right)dx+\left(x+xy^2\right)dy=0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.

כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu\left(x^\alpha y^\beta\right)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $\left(y-xy^2\ln x\right)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: }\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right)\quad\text{then: I.F.: }\mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy)\quad\text{then: I.F. : }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if : }\frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y)\quad\text{then:I.F.: }\mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x>2)\quad (x-2)y'=y+2(x-2)^3$

4) $(x>0)\quad x^3y'+(2-3x^2)y=x^3$

5) $y(0)=1\ ;\ \frac{dy}{dt}+y=2+2t$

6) $(\sin x>0)\quad \frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$

7) $(\sin x>0)\quad y'-2y\cot x=1$

8) $z(\pi)=0\ ;\ x^2z'+2xz=\cos x$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

2) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right]$

3) $y = (x-2)\left[x^2 - 4x + C\right]$

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y = 2t + e^{-t}$

6) $y = \frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x} + C\right]$

7) $y = \sin^2 x\left[-\cot x + C\right]$

8) $z = \frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y) = y^2(y + c)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\frac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\frac{1}{\sin x}z^3 \qquad \left(\sin x\neq 0\right)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\frac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©