

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים..... 1
2. שיטת לגראנג..... 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

(1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \quad \gamma = \{y = \alpha x\} \quad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

(2) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x - y$ $\gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $3u_x - 2u_y = 0$

(3) פתרו את המשוואה $u|_\gamma = x + \sin(xy)$ $\gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $u_x + 2u_y = 0$

(4) פתרו את המשוואה $y \geq 0$ $u_x - u_y = -u$ $u(x, 0) = x^2 - x^4$

(5) פתרו את המשוואה $u(x, -x) = (x+1)e^{-x}$ $2u_x - 3u_y + 2u = 0$

(6) פתרו את המשוואה $y \geq e^{-x}$ $u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2}$ $u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$

(7) נתון כי $u(x, y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{aligned} y^2 u_x + u_y &= -u & 0 < x < \infty, \quad y > 0 \\ u(0, y) &= 0 & y > 0 \\ u(x, 0) &= 1 & x > 0 \end{aligned}$$

(8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{aligned} 2u_x + u_y &= -u & 0 < y < x \\ u(x, 0) &= a \cdot \cos(x) + \sin(x) & x > 0 \\ u(y, y) &= 0 & y > 0 \end{aligned}$$

שיטת לגראנג

שאלות

(1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x + yuu_y = u$.

(2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

(3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

(4) מצאו פתרון כללי למשוואה $(y^2 + u^2)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

(5) מצאו פתרון למשוואה
$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x, 1) = x & x > 0 \end{cases}$$

(6) פתרו את המשוואה
$$\begin{cases} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y} u & u > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x \sqrt{y+1}} u_x + yu_y = y^2 u$,

בתחום $u, y > 0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

(8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$,

בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו- $u > 0$.

(9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x + \frac{1}{x}u_y = 2$.

(10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$,

בתחום $x, y > 0$.

11 נתון כי $u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

א. מצאו את הפונקציות a, b, c .

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0, y) = y^2$.

תשובות סופיות

$$F\left(\frac{x}{u}, \ln(y) - u\right) = 0 \quad \text{1}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}} \quad \text{2}$$

$$u = \sqrt{F\left(\ln \frac{x}{y}\right) - xy} \quad \text{3}$$

$$F\left(\frac{y}{u}, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0 \quad \text{4}$$

$$u(x, y) = x \cdot y \quad \text{5}$$

$$u(x, y) = e^{e^y - 1} \quad \text{6}$$

$$u(x, y) = e^{\frac{1}{2}y^2 - F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}\right)} \quad \text{א. 7}$$

ב. שאלת הוכחה.

$$u(x, y) = e^{e^y - F(e^{-x} \sin y)} \quad \text{8}$$

$$u(x, y) = xy - F\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{9}$$

$$u(x, y) = \frac{y^2 + 2xy - x^2 - F\left(\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4} \quad \text{10}$$

$$u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} \cdot \frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1} - 1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1} - 1}} \cdot \frac{y+1}{x^2+1} \quad \text{ב. 11}$$

$$\underbrace{(x^2+1)u_x}_a + \underbrace{2x(y+1)u_y}_b = \underbrace{2xyu}_c \quad \text{א. 11}$$