

# משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים..... 1
2. שיטת לגראנג..... 2

## שיטת הקווים האופייניים

## שאלות

(1) פתרו את המשוואה עבור  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \quad \gamma = \{y = \alpha x\} \quad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

(2) פתרו את המשוואה  $u|_\gamma = x - y$   $\gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$   $3u_x - 2u_y = 0$

(3) פתרו את המשוואה  $u|_\gamma = x + \sin(xy)$   $\gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$   $u_x + 2u_y = 0$

$$u_x - u_y = -u \quad y \geq 0$$

$$u(x, 0) = x^2 - x^4$$

(4) פתרו את המשוואה

$$2u_x - 3u_y + 2u = 0$$

$$u(x, -x) = (x+1)e^{-x}$$

(5) פתרו את המשוואה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \quad y \geq e^{-x}$$

$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

(6) פתרו את המשוואה

(7) נתון כי  $u(x, y)$  הוא פתרון של הבעיה

$$y^2 u_x + u_y = -u \quad 0 < x < \infty, \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0 \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = 1 \quad x > 0$$

(8) פתרו את הבעיה כאשר  $a$  קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = -u \quad 0 < y < x$$

$$u(x, 0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) \quad x > 0$$

$$u(y, y) = 0 \quad y > 0$$

## שיטת לגראנג

## שאלות

(1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח  $xu_x + yuu_y = u$ .

(2) מצאו פתרון כללי למשוואה  $x^2u_x + y^2u_y = u^2$ .

(3) מצאו פתרון כללי למשוואה  $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$ , כאשר  $x, y, u > 0$ .

(4) מצאו פתרון כללי למשוואה  $(y^2 + u^2)u_x - xyu_y = xu$ , כאשר  $x, y, u > 0$ .

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , אז  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

(5) מצאו פתרון למשוואה 
$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x, 1) = x & x > 0 \end{cases}$$

(6) פתרו את המשוואה 
$$\begin{cases} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y} u & u > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה  $\frac{1}{e^x \sqrt{y+1}} u_x + yu_y = y^2 u$ ,

בתחום  $u, y > 0$ .

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

(8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה  $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$ ,

בתחום שבו  $0 < y < \pi$  ו-  $u > 0$ .

(9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה  $\frac{1}{y} u_x + \frac{1}{x} u_y = 2$ .

(10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה  $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$ ,

בתחום  $x, y > 0$ .

**11** נתון כי  $u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$  הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

א. מצאו את הפונקציות  $a, b, c$ .

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים  $u(0, y) = y^2$ .

### תשובות סופיות

$$F\left(\frac{x}{u}, \ln(y) - u\right) = 0 \quad (1)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$u = \sqrt{F\left(\ln \frac{x}{y}\right) - xy} \quad (3)$$

$$F\left(\frac{y}{u}, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0 \quad (4)$$

$$u(x, y) = x \cdot y \quad (5)$$

$$u(x, y) = e^{e^y - 1} \quad (6)$$

$$u(x, y) = e^{\frac{1}{2}y^2 - F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}\right)} \quad (7) \quad \text{א. ב. שאלת הוכחה.}$$

$$u(x, y) = e^{e^y - F(e^{-x} \sin y)} \quad (8)$$

$$u(x, y) = xy - F\left(\frac{x}{y}\right) \quad (9)$$

$$u(x, y) = \frac{y^2 + 2xy - x^2 - F\left(\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4} \quad (10)$$

$$u(x, y) = \frac{e^y}{y+1} \cdot \frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1} - 1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1} - 1}} \cdot \frac{y+1}{x^2+1} \quad (11) \quad \text{א. } \underbrace{(x^2+1)}_a u_x + \underbrace{2x(y+1)}_b u_y = \underbrace{2xyu}_c$$