מבוא למשוואות דיפרנציאליות

פרק 3 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה מסדר שלישי 1
2. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים 2
3. שיטת השוואת מקדמים 5
4. שיטת וריאציית הפרמטרים 7
5. משוואת אוילר מסדר שלישי ..... (ללא ספר)
6. הוורונסקיאן ושימושיו 8
7. השיטה האופרטורית 9

משוואה חסרה מסדר שלישי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'y'''-(y'')^2-3y''(y')^2-4(y')^4=-16y(y')^3$,
עם תנאי ההתחלה $y''(0)=-12,\quad y'(0)=-3,\quad y(0)=0$.

2) $$\begin{cases} y'''-\dfrac{(y'')^2}{y'}=y''y'-2(y')^2y \\ y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=2 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} y'''-\dfrac{(y'')^2}{y'}=y''y'-2(y')^2y \\ y(0)=-1,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=0 \end{cases}$$

4) $$\begin{aligned} &3y'''y-y'y''=0 \\ &y(1)=1,\quad y'(1)=3,\quad y''(1)=6 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} &\left(y'y'''-2(y'')^2\right)y^2=-(y')^4 \\ &y>0 \\ &y(1)=y'(1)=y''(1)=1 \end{aligned}$$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln\left|-3+4y\right|=x+\frac{1}{4}\ln 3$

2) $y=\frac{1}{1-x}-1$

3) $y=\tan x-1$

4) $y=x^3$

5) $y=e^{x-1}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-15**:

1) $y'''-2y''-3y'=0$

2) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=0$

3) $y'''-2y''-y'+2y=0$

4) $y^{(4)}-5y''+4y=0$

5) $y^{(4)}-y=0$

6) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+20y=0$

7) $y^{(4)}+y=0$

8) $y^{(6)}-y''=0$

9) $\left(D^5+3D^4+2D^3-2D^2-3D-1\right)y=0$

10) $y^{(8)}+8y^{(4)}+16y=0$

11) $z'''-6z''+12z'-8z=0$

12) $y^{(4)}-4y=0$

13) $x^{(6)}-3x^{(4)}+3x''-x=0$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) $$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

15) $$\begin{cases} y'''' - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases}$$

16) נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6, אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$.

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצאו את המשוואה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$

2) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+c_3e^{-x}$

4) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{0x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]$

6) $y=c_1e^{-4x}+e^{x}\left[c_2\cos 2x+c_3\sin 2x\right]$

7) $y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

8) $y=c_1+c_2x+c_3e^{x}+c_4e^{-x}+\cos x+\sin x$

9) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+c_4x^2e^{-x}+c_5x^3e^{-x}$

10) $y=e^{x}\left[c_1\cos x+c_2\sin x\right]+xe^{x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]+$
$+e^{-x}\left[c_5\cos x+c_6\sin x\right]+xe^{-x}\left[c_7\cos x+c_8\sin x\right]$

11) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3x^2e^{2x}$

12) $y=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x$

13) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}+c_4e^{-x}+c_5xe^{-x}+c_6x^2e^{-x}$

14) $y=e^{x}+2\cos x+3\sin x$

15) $y=e^{x}-2e^{2x}+3\cos 2x+4\sin 2x$

16) א. $y=e^{x}\left[c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right]+xe^{x}\left[c_3\cos 2x+c_4\sin 2x\right]+$
$+x^2e^{x}\left[c_5\cos 2x+c_6\sin 2x\right]$

ב. $y''''''-6y''''''+27y''''-68y'''+135y''-150y'+125y=0$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

שיטת השוואת מקדמים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'''-2y''-3y'=2\sin x-4\cos x$

2) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=-28e^{2x}$

3) $y'''-2y''-y'+2y=2x^3-3x^2-12x+14$

4) $y'''-3y'+2y=e^x$

5) $y'''-y''+y'-y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

6) $\begin{cases} y'''-y'=4e^{-x}+3e^{2x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \\ y''(0)=2 \end{cases}$

7) $y^{(4)}+y''=3x^2+4\sin x-2\cos x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + x^3 + 4$

4) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^{x}$

5) $y = c_1 e^{x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x \left(\cos x - \sin x \right)$

6) $y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x}$

7) $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''' + y' = \frac{1}{\cos x}$

2) $y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$

3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x}$

תשובות סופיות

1) $y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right| - x\cos x + \sin x \ln|\cos x|$

2) $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} +$
$+\frac{1}{2}\left(e^x + 1 - \ln\left(e^x+1\right)\right) + e^x\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right) + e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)$

3) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4}x^2 e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x \ln|x|$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם קיימת מד"ר מהצורה $y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$,
בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1,1]$,
כך שהפונקציות $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=x^3$, הן פתרונות שלה?

2) נתונות הפונקציות $y_1(x)=4-x,\ y_2(x)=4+x,\ y_3(x)=20+x$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות.

ב. קבעו האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty,\infty)$.

ג. ענו שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר $y''=0$.

3) פתרו את הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע I , כך ש-$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=x^3$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות

1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת $x=0$.

2) א. $W=0$ ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.

3) א. שאלת הוכחה. ב. $y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0$, $x\neq 0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השיטה האופרטורית

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\left(D^3-2D^2-3D\right)y=4e^x-10e^{-2x}$

2) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=10e^{4x}+2e^x-1$

3) $\left(D^4-6D^3+13D^2-12D+4\right)y=10e^x+4e^{2x}$

4) $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=24e^x+81e^{4x}$

5) $\left(D^6+D^4+D^2\right)y=104\sin\left(2x+1\right)+\cos\left(x+10\right)$

6) $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=-5\sin 2x$

7) $\left(D^4-3D^3+6D^2-12D+8\right)y=30\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+48\cos^2 x-16$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{0x}+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-e^x+e^{-2x}$

2) $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+\frac{5}{81}e^{4x}-\frac{1}{18}xe^x-\frac{1}{30}$

3) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}+5x^2e^x+2x^2e^{2x}$

4) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}-\frac{1}{3}x^4e^x+xe^{4x}$

5) $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}+c_5e^{3x}+c_6e^{-3x}-2\sin\left(2x+1\right)-\cos\left(x+10\right)$

6) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}+\frac{1}{500}\left[4\sin 2x-22\cos 2x\right]$

7) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x+\frac{5\sin x+25\cos x}{26}+\frac{-3\cos 2x-18\sin 2x}{37}+1$

כתב ופתר – גיא סלומון ©