מכינה כללית במתמטיקה

פרק 14 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x=\sin\alpha$	$x_1=\alpha+360°k$, $x_2=180°-\alpha+360°k$
$\cos x=\cos\alpha$	$x_{1,2}=\pm\alpha+360°k$
$\tan x=\tan\alpha$	$x=\alpha+180°k$
$\cot x=\cot\alpha$	$x=\alpha+180°k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

א. $\sin x=\frac{1}{2}$ ב. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x=-\frac{1}{2}$

2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

א. $\cos x=\frac{1}{2}$ ב. $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

א. $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x=-1$

4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$
ב. $\cos x = -0.6$
ג. $\tan x = 5$

5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$
ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$
ג. $\tan 5x = -1$
ד. $3\sin 2x = 2$
ה. $3\cos 3x = 1$
ו. $2\tan 4x = 1$

6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x + 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
ב. $\cos(75° - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
ג. $\tan(50° - x) = 1.3$

7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$
ב. $\sin 2x = \sin(x + 30°)$
ג. $\sin x = \sin(120° - x)$
ד. $\cos x = \cos 3x$
ה. $\cos x = \cos(40° - x)$
ו. $\tan x = \tan 3x$
ז. $\tan 2x = \tan(60° - x)$

8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$
ב. $\sin x = 1$
ג. $\sin x = -1$
ד. $\cos x = 0$
ה. $\cos x = 1$
ו. $\cos x = -1$
ז. $\tan x = 0$
ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k\ ,\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k\ ,\ x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$

ג. $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k\ ,\ x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$ ד. $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k\ ,\ x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$.

2) א. $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$.

3) א. $x = 30^\circ + 180^\circ k$ ב. $x = 135^\circ + 180^\circ k$.

4) א. $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k\ ,\ x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$

ב. $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$ ג. $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$.

5) א. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k\ ,\ x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$ ב. $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k\ ,\ x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$

ג. $x = -9^\circ + 36^\circ k$ ד. $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k\ ,\ x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$

ה. $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$ ו. $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$.

6) א. $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k\ ,\ x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$

ב. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k\ ,\ x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$ ג. $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$.

7) א. $x_1 = 180^\circ k\ ,\ x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$ ב. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k\ ,\ x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$

ג. $x = 60^\circ + 180^\circ k$ ד. $x = 90^\circ k$

ה. $x = 20^\circ + 180^\circ k$ ו. $x = 180^\circ k$ ז. $x = 20^\circ + 60^\circ k$.

8) א. $x = 180^\circ k$ ב. $x = 90^\circ + 360^\circ k$ ג. $x = 180^\circ + 360^\circ k$

ד. $x = 90^\circ + 180^\circ k$ ה. $x = 360^\circ k$ ו. $x = 180^\circ + 360^\circ k$

ז. $x = 180^\circ k$ ח. $x = 45^\circ + 180^\circ k$.

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע״י הוצאת גורם משותף, ע״י נוסחאות הכפל המקוצר וע״י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

1) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

2) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

3) $\tan^2 2x = 3$

4) $\sin x \cos 3x = 0$

5) $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$

6) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

7) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

8) $3\sin^2 x - \sin x = 2$

9) $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

10) $\cos^2 x + 2\cos x = 3$

11) $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

12) $\tan^2 x = 4\tan x - 1$

13) $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$

14) $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$

15) $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2}=\pm 30^\circ+360^\circ k\ ,\ x_{3,4}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

2) $x_1=30^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=150^\circ+360^\circ k\ ,\ x_3=330^\circ+360^\circ k\ ,\ x_4=210^\circ+360^\circ k$.

3) $x_1=30^\circ+90^\circ k\ ,\ x_2=-30^\circ+90^\circ k$.

4) $x_1=180^\circ k\ ,\ x_2=30^\circ+60^\circ k$.

5) $x_1=90^\circ k\ ,\ x_2=15^\circ+180^\circ k\ ,\ x_3=75^\circ+180^\circ k$.

6) $x_1=90^\circ+180^\circ k\ ,\ x_{2,3}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

7) $x_1=90^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=210^\circ+360^\circ k\ ,\ x_3=-30^\circ+360^\circ k$.

8) $x_1=90^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=-41.8^\circ+360^\circ k\ ,\ x_3=221.8^\circ+360^\circ k$.

9) $x_1=30^\circ+360^\circ k,\ x_2=150^\circ+360^\circ k,\ x_3=-19.4^\circ+360^\circ k,\ x_4=199.4^\circ+360^\circ k$.

10) $x=360^\circ k$.

11) $x_1=-45^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=75.964^\circ+180^\circ k$.

12) $x_1=75^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=15^\circ+180^\circ k$.

13) $x=360^\circ k$.

14) $x=180^\circ+360^\circ k$.

15) $x=45^\circ+90^\circ k\ ,\ x\neq -45^\circ+180^\circ k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=\cos x$

2) $\sin x=\cos(x+45°)$

3) $\cos x=\frac{2}{3}\sin^2 x$

4) $2\cos^2 x=3\sin x$

5) $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

6) $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

7) $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

8) $\sin x-\tan x=0$

תשובות סופיות:

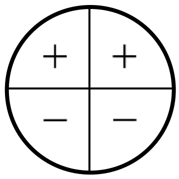
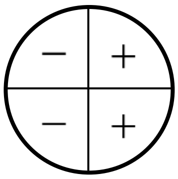
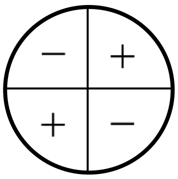
1) $x = 45° + 180°k$.
2) $x = 22.5° + 180°k$.
3) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$.
4) $x_1 = 30° + 360°k$, $x_2 = 150° + 360°k$.
5) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$.
6) $x_1 = 30° + 120°k$, $x_2 = -90° + 360°k$
7) $x_{1,2} = \pm 45° + 360°k$, $x_{3,4} = \pm 135° + 360°k$.
8) $x = 180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin\left(180^o-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\sin\left(180^o+\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\cos\left(180^o-\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(180^o+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\tan\left(180^o-\alpha\right)=-\tan\alpha$ $\tan\left(180^o+\alpha\right)=\tan\alpha$ $\tan\left(-\alpha\right)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{aligned}\tan\left(\alpha+180^\circ k\right)&=\tan\alpha\\ \cot\left(\alpha+180^\circ k\right)&=\cot\alpha\end{aligned}}\quad,\quad\boxed{\begin{aligned}\sin\left(\alpha+360^\circ k\right)&=\sin\alpha\\ \cos\left(\alpha+360^\circ k\right)&=\cos\alpha\end{aligned}}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=-\sin 3x$
2) $\cos 2x=-\cos 3x$
3) $\sin\left(x+30^\circ\right)=-\cos x$
4) $\sin 3x=-\cos\left(180^\circ-x\right)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=90^\circ k\ ,\ x_2=-90^\circ+180^\circ k$
2) $x_1=180^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=36^\circ+72^\circ k$
3) $x=120^\circ+180^\circ k$
4) $x_1=22.5^\circ+90^\circ k\ ,\ x_2=45^\circ+180^\circ k$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a\cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$ (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$).
כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a\cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a\frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tanh^{-1}(a) + 180°k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה.
אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x = 2\cos x$
2) $3\sin x = \cos x$
3) $4\sin x = 7\cos x$
4) $2\sin x = -5\cos x$
5) $\sin^2 x = 8\cos^2 x$
6) $3\sin^2 x = \cos^2 x$

תשובות סופיות:

1) $x = 63.43° + 180°k$.
2) $x = 18.43° + 180°k$.
3) $x = 60.25° + 180°k$.
4) $x = -68.19° + 180°k$.
5) $x_1 = 70.52° + 180°k$, $x_2 = -70.52° + 180°k$.
6) $x_1 = 30° + 180°k$, $x_2 = -30° + 180°k$.

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס	$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ $\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $2\sin x=\sin(60°-x)$

2) $\sin(x+45°)\sin(x-45°)=\frac{1}{2}$

3) $\frac{\cos3x}{\sin x}-\frac{\sin3x}{\cos x}=2$

4) $3\cos^2x-\sin^2x=\sin3x$

תשובות סופיות:

1) $x=19.11°+180°k$.

2) $x=90°+180°k$.

3) $x=15°+60°k$.

4) $x_{1,2}=\pm60°+180°k$, $x_3=90°+360°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

סינוס זווית כפולה	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
קוסינוס זווית כפולה	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x - \sin 2x = 0$

2) $\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0$

3) $4\cos x = \sin 2x$

4) $2\cos 2x + \sin 4x = 0$

5) $3\cos x - \cos 2x = 0$

6) $\cos 2x = 2\sin x$

7) $\sin x + \cos 2x = 1$

8) $2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

תשובות סופיות:

1) $x_1 = 360°k$, $x_2 = 60° + 120°k$

2) $x_1 = 180°k$, $x_{2,3} = \pm 135° + 360°k$

3) $x = 90° + 180°k$

4) $x_1 = 45° + 90°k$, $x_2 = 135° + 180°k$

5) $x_{1,2} = \pm 106.307° + 360°k$

6) $x_1 = 21.1° + 360°k$, $x_2 = 158.9° + 360°k$

7) $x_1 = 180°k$, $x_2 = 30° + 360°k$, $x_3 = 150° + 360°k$.

8) $x_1 = -60 + 360°k$, $x_2 = 60° + 360°k$, $x_3 = 120° + 360°k$, $x_4 = 240° + 360°k$.

משוואות מהצורה: a sin(x) + b cos(x) = c :

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a\sin x+b\cos x=c$ לצורה: $\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x+\tan\alpha\cdot\cos x=\frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ יובילו:

$$\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x=\frac{c}{a}\quad /\cdot\cos\alpha$$

$$\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a}\cos\alpha=k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x+\alpha)=k$ כאשר α ו- k ידועים.
מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $10\sin x+3\cos x=5$

2) $5\cos x-6\sin x=1$

3) $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{12}$

4) $\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

5) $\cos x+\cos(60^\circ+x)=\sqrt{2}+\cos(60^\circ-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=11.91^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=134.69^\circ+360^\circ k$

2) $x_1=227.156^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=32.44^\circ+360^\circ k$

3) $x=15^\circ+180^\circ k$

4) $x_1=-60^\circ+720^\circ k\ ,\ x_2=180^\circ+360^\circ k$

5) $x_1=-105^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=15^\circ+360^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סכום והפרש פונקציות עבור סינוס	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

2) $\cos 2x-\cos 6x=\sin 2x$.

3) $\sin x+\sin 3x=4\sin^3 x$.

4) $\sin 6x-\sin 4x=1-\cos 2x$.

5) $(\sin 5x+\sin 7x)^2=(\cos 5x+\cos 7x)^2$.

6) $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x+\cos 5x=1$.

7) $1+\sin x+\sin 7x=\cos 8x$.

8) $2\sin 3x(\cos 2x+\cos x)=\sin x+\sin 2x$.

9) $\sin(x+60°)-\sin x=\sin(2x+60°)-\sin 2x$.

10) $\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x$.

11) $\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0$.

12) $\cos x + 3\sin x = 1 + 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

13) $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0$.

14) $4\cos x \cos 2x \cos 3x = 1$.

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k \ , \ x_3 = 90°k$.

2) $x_1 = 45° + 90°k \ , \ x_2 = 180°k$.

3) $x_1 = 37.5° + 90°k \ , \ x_2 = 7.5° + 90°k \ , \ x_3 = 90°k$.

4) $x_1 = 15° + 60°k \ , \ x_2 = 180°k \ , \ x_3 = -22.5° + 90°k$.

5) $x_1 = 36°k \ , \ x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)° + \left(\frac{180}{7}\right)°k$.

6) $x_{1,2} = \pm 30° + 90°k \ , \ x_3 = 90° + 180°k$.

7) $x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)°k + \left(51\frac{3}{7}\right)°k \ , \ x_2 = 45°k$.

8) $x_1 = 40°k \ , \ x_2 = 180° + 360°k$.

9) $x_1 = -20° + 120°k \ , \ x_2 = 360°k$.

10) $x_1 = 52.5° + 90°k \ , \ x_2 = -7.5° + 90°k \ , \ x_3 = 90°k$.

11) $x_1 = 45° + 90°k \ , \ x_2 = 11.25° + 22.5°k$.

12) $x_1 = 30° + 360°k \ , \ x_2 = 150° + 360°k$.

13) $x_1 = 7.5° + 15°k \ , \ x_2 = 90°k$.

14) $x_1 = 60° + 180°k \ , \ x_2 = 22.5 + 45°k$.

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן :

1) $8\sin x-4=0$, $[0°:180°]$.

2) $\sin 2x=\sin(x+60°)$, $[-90°:90°]$.

3) $3\cos(2x+30°)+1=0$, $[-90°:90°]$.

4) $\cos(50°-x)=-\cos x$, $[0°:360°]$.

5) $2\sin 3x-5\cos 3x=0$, $[-30°:30°]$.

6) $2\cos^2 3x=\sin 6x+1$, $[0°:180°]$.

7) $\cos 4x+1=3\sin 2x$, $[-180°:180°]$.

8) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0$, $[-180°:180°]$.

תשובות סופיות:

1) $x=30°\ ,\ 150°$.

2) $x=-80°\ ,\ 40°\ ,\ 60°$.

3) $x=39.736°\ ,\ -69.736°$.

4) $x=115°\ ,\ 295°$.

5) $x=22.733°$.

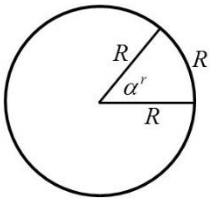
6) $x=7.5°\ ,\ 37.5°\ ,\ 67.5°\ ,\ 97.5°\ ,\ 127.5°\ ,\ 157.5°$.

7) $x=-165°\ ,\ -105°\ ,\ 15°\ ,\ 75°$.

8) $x=-138.19°\ ,\ -41.81°\ ,\ 90°$.

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

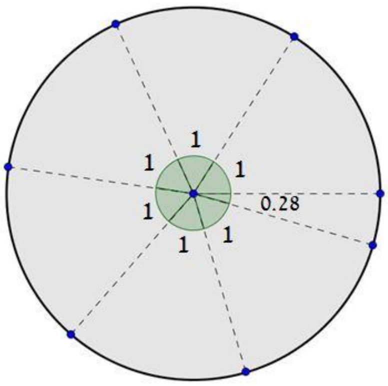
סיכום כללי:



הגדרת הרדיאן:

זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R, תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P = 2\pi \cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל.
הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד,
כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן.
מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r = \frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\alpha^r$.

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin\alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k \;\; , \;\; x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos\alpha$	$x_{1,2} = \pm\alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan\alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot\alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר k מספר שלם.

GOOL
בשביל התירגול

שאלות:

1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. $30°$ ב. $90°$ ג. $75°$ ד. $120°$

ה. $210°$ ו. $315°$ ז. $18°$ ח. $285°$

ט. $-15°$ י. $-80°$ יא. $510°$ יב. $-390°$

2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π ב. 2π ג. 4π ד. 1.5π

ה. $\frac{1}{2}\pi$ ו. $\frac{\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{6}$ ח. $\frac{1}{18}\pi$

ט. $\frac{13}{18}\pi$ י. $\frac{19}{12}\pi$ יא. $1\frac{1}{6}\pi$ יב. $2\frac{1}{4}\pi$

3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1$, $\left[0:\frac{1}{3}\pi\right]$ ב. $\sqrt{3}+2\cos x = 0$, $[0:\pi]$

ג. $3-3\tan\frac{x}{2} = 0$, $[0:2\pi]$ ד. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0:\pi]$

ה. $4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2 = 0$, $\left[0:\frac{1}{2}\pi\right]$ ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18}:\frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5-5\tan(4x-0.1\pi) = 0$, $\left[0:\frac{\pi}{3}\right]$ ח. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right) = 0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4}\right]$

4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\left[0:\frac{\pi}{2}\right]$ ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$, $[0:\pi]$ ד. $3\sin x\cos x + 3\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right]$ ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, $[-\pi:\pi]$

ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$, $[-\pi:0]$ ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$, $[0:2\pi]$

5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \le x \le \pi$, $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \le x \le \pi$, $\tan x = 4\sin x$

ג. $0 \le x \le 2\pi$, $2\sin^2 x = 3\cos x$

6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi]$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi]$, $\sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi]$, $\sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan x = -\tan 2x$

7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \le x \le \pi$, $\sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi]$, $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \le x \le \pi$, $\cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

2) א. $180°$ ב. $360°$ ג. $720°$ ד. $270°$ ה. $90°$

ו. $45°$ ז. $30°$ ח. $10°$ ט. $130°$ י. $285°$

יא. $210°$ יב. $405°$.

3) א. $x=\frac{\pi}{18}\ ,\ \frac{5\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

4) א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x=0.398\pi,0.602\pi$ ד. ϕ

ה. $x=0,0.437\pi$ ו. $x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$

ז. $x=-\frac{\pi}{4}\ ,\ -0.615\pi$ ח. $x=0.352\pi\ ,\ 0.437\pi\ ,\ 1.352\pi\ ,1.437\pi$.

5) א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $x=0\ ,\ 0.42\pi\ ,\ \pi$ ג. $x=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}$

6) א. $x=\frac{\pi}{12}\ ,\ -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x=\frac{23\pi}{72}\ ,\ \frac{59\pi}{72}$

ג. $x=\frac{\pi}{10}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{9\pi}{10}$ ד. $x=\pm\frac{\pi}{3}\ ,\ 0$.

7) א. $x=\pm\frac{\pi}{2}\ ,\ -0.148\pi\ ,\ 0.852\pi$ ב. $x=-\frac{7\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{5\pi}{12}\ ,\ \frac{11\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $x=0\ ,\ 0.38\pi\ ,\ 0.61\pi\ ,\ \pi$.

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:

1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
   - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
   - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

(1 $\sin x < \frac{1}{2}$ $[0,180°]$

(2 $2\cos x - \sqrt{3} \ge 0$ $[0,1.5\pi]$

(3 $2\cos^2 x + \sin x \ge 1$ $(-90°,90°)$

(4 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$ $[0,\pi]$

(5 $1 < 2\sin(x+10°) < \sqrt{3}$ $[0°,180°]$

(6 $\sin x + \sqrt{3}\cos x \ge 1$ $(0 < x < \pi)$

(7 $\tan x + \cot x > 0$ $[0,2\pi]$

(8 $|\tan(x)| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(-\pi < x < \pi)$

תשובות סופיות:

1) $0° \le x < 30°$, $150° \le x \le 180°$.

2) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

3) $-30° \le x < 90°$.

4) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

5) $20° < x < 50°$, $110° < x < 140°$.

6) $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

7) $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

8) $x \ne \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ או: $x \ne -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$.