# חדוא 71071

## פרק 27 - משוואות טריגונומטריות

### תוכן העניינים


1. משוואות טריגונומטריות כלליות ..... 1
2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית ..... 4
3. משוואות הנפתרות עי שימוש בזהויות ..... 6
4. משוואות עם תחום נתון ..... 8
5. משוואות עם זוויות ברדיאנים ..... 9

# משוואות טריגונומטריות כלליות:

## סיכום כללי:

**פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):**

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר $x$ הוא משתנה ו- $\alpha$ היא זווית נתונה/ידועה:

| המשוואה | הפתרון |
|---|---|
| $\sin x = \sin\alpha$ | $x_1 = \alpha + 360°k \ , \ x_2 = 180° - \alpha + 360°k$ |
| $\cos x = \cos\alpha$ | $x_{1,2} = \pm\alpha + 360°k$ |
| $\tan x = \tan\alpha$ | $x = \alpha + 180°k$ |
| $\cot x = \cot\alpha$ | $x = \alpha + 180°k$ |

כאשר $k$ מספר שלם.

## שאלות:

**1)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

**2)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**3)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$

**4)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

**5)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3\sin 2x = 2$

ה. $3\cos 3x = 1$ ו. $2\tan 4x = 1$

**6)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x+30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75° - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50° - x) = 1.3$

**7)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x+30°)$

ג. $\sin x = \sin(120° - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40° - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60° - x)$

**8)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k$ ב. $x_1=45°+360°k\ ,\ x_2=135°+360°k$

ג. $x_1=-60°+360°k\ ,\ x_2=240°+360°k$ ד. $x_1=-30°+360°k\ ,\ x_2=210°+360°k$.

**2)** א. $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$ ב. $x_{1,2}=\pm 150°+360°k$.

**3)** א. $x=30°+180°k$ ב. $x=135°+180°k$.

**4)** א. $x_1=44.427°+360°k\ ,\ x_2=135.573°+360°k$

ב. $x_{1,2}=126.87°+360°k$ ג. $x=78.69°+180°k$.

**5)** א. $x_1=10°+120°k\ ,\ x_2=50°+120°k$ ב. $x_1=75°+180°k\ ,\ x_2=-75°+180°k$

ג. $x=-9°+36°k$ ד. $x_1=20.9°+180°k\ ,\ x_2=69.09°+180°k$

ה. $x_{1,2}=\pm 23.5°+120°k$ ו. $x=6.64°+45°k$.

**6)** א. $x_1=105°+180°k\ ,\ x_2=-45°+180°k$

ב. $x_1=10°+120°k\ ,\ x_2=40°+120°k$ ג. $x=-2.431°+180°k$.

**7)** א. $x_1=180°k\ ,\ x_2=45°+90°k$ ב. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=50°+120°k$

ג. $x=60°+180°k$ ד. $x=90°k$

ה. $x=20°+180°k$ ו. $x=180°k$ ז. $x=20°+60°k$.

**8)** א. $x=180°k$ ב. $x=90°+360°k$ ג. $x=180°+360°k$

ד. $x=90°+180°k$ ה. $x=360°k$ ו. $x=180°+360°k$

ז. $x=180°k$ ח. $x=45°+180°k$.

# משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

## סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

**טכניקות שכיחות:**

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

## שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

**1)** $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

**2)** $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

**3)** $\tan^2 2x = 3$

**4)** $\sin x \cos 3x = 0$

**5)** $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$

**6)** $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

**7)** $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

**8)** $3\sin^2 x - \sin x = 2$

**9)** $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

**10)** $\cos^2 x + 2\cos x = 3$

**11)** $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

**12)** $\tan^2 x = 4\tan x - 1$

**13)** $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$

**14)** $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$

**15)** $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$

## תשובות סופיות:

**1)** $x_{1,2}=\pm 30^\circ+360^\circ k$ , $x_{3,4}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

**2)** $x_1=30^\circ+360^\circ k$ , $x_2=150^\circ+360^\circ k$ , $x_3=330^\circ+360^\circ k$ , $x_4=210^\circ+360^\circ k$.

**3)** $x_1=30^\circ+90^\circ k$ , $x_2=-30^\circ+90^\circ k$.

**4)** $x_1=180^\circ k$ , $x_2=30^\circ+60^\circ k$.

**5)** $x_1=90^\circ k$ , $x_2=15^\circ+180^\circ k$ , $x_3=75^\circ+180^\circ k$.

**6)** $x_1=90^\circ+180^\circ k$ , $x_{2,3}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

**7)** $x_1=90^\circ+360^\circ k$ , $x_2=210^\circ+360^\circ k$ , $x_3=-30^\circ+360^\circ k$.

**8)** $x_1=90^\circ+360^\circ k$ , $x_2=-41.8^\circ+360^\circ k$ , $x_3=221.8^\circ+360^\circ k$.

**9)** $x_1=30^\circ+360^\circ k, x_2=150^\circ+360^\circ k, x_3=-19.4^\circ+360^\circ k, x_4=199.4^\circ+360^\circ k$.

**10)** $x=360^\circ k$.

**11)** $x_1=-45^\circ+180^\circ k$ , $x_2=75.964^\circ+180^\circ k$.

**12)** $x_1=75^\circ+180^\circ k$ , $x_2=15^\circ+180^\circ k$.

**13)** $x=360^\circ k$.

**14)** $x=180^\circ+360^\circ k$.

**15)** $x=45^\circ+90^\circ k$ , $x\neq -45^\circ+180^\circ k$.

# משוואות הנפתרות ע"י שימוש בזהויות:

## שאלות:

**10)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות יסוד):

א. $\sin x=\cos x$

ב. $\sin x=\cos\left(x+45°\right)$

ג. $\cos x=\frac{2}{3}\sin^2 x$

ד. $2\cos^2 x=3\sin x$

ה. $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

ו. $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

ז. $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

ח. $\sin x-\tan x=0$

**11)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $\sin x=-\sin 3x$

ב. $\cos 2x=-\cos 3x$

ג. $\sin\left(x+30°\right)=-\cos x$

ד. $\sin 3x=-\cos\left(180°-x\right)$

**12)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (חלוקה בקוסינוס):

א. $\sin x=2\cos x$

ב. $3\sin x=\cos x$

ג. $4\sin x=7\cos x$

ד. $2\sin x=-5\cos x$

ה. $\sin^2 x=8\cos^2 x$

ו. $3\sin^2 x=\cos^2 x$

**13)** כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זהויות של זווית כפולה):

א. $\sin x-\sin 2x=0$

ב. $\sqrt{2}\sin x+\sin 2x=0$

ג. $4\cos x=\sin 2x$

ד. $2\cos 2x+\sin 4x=0$

ה. $3\cos x-\cos 2x=0$

ו. $\cos 2x=2\sin x$

ז. $\sin x+\cos 2x=1$

ח. $2\sin^2 x=\cos 2x+2$

## תשובות סופיות:

**10)** א. $x=45°+180°k$ ב. $x=22.5°+180°k$

ג. $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$ ד. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k$

ה. $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$ ו. $x_1=30°+120°k\ ,\ x_2=-90°+360°k$

ז. $x_{1,2}=\pm 45°+360°k\ ,\ x_{3,4}=\pm 135°+360°k$ ח. $x=180°k$ .

**11)** א. $x_1=90°k\ ,\ x_2=-90°+180°k$ ב. $x_1=180°+360°k\ ,\ x_2=36°+72°k$

ג. $x=120°+180°k$ ד. $x_1=22.5°+90°k\ ,\ x_2=45°+180°k$ .

**12)** א. $x=63.43°+180°k$ ב. $x=18.43°+180°k$

ג. $x=60.25°+180°k$ ד. $x=-68.19°+180°k$

ה. $x_1=70.52°+180°k\ ,\ x_2=-70.52°+180°k$

ו. $x_1=30°+180°k\ ,\ x_2=-30°+180°k$ .

**13)** א. $x_1=360°k\ ,\ x_2=60°+120°k$

ב. $x_1=180°k\ ,\ x_{2,3}=\pm 135°+360°k$

ג. $x=90°+180°k$ ד. $x_1=45°+90°k\ ,\ x_2=135°+180°k$

ה. $x_{1,2}=\pm 106.307°+360°k$ ו. $x_1=21.1°+360°k\ ,\ x_2=158.9°+360°k$

ז. $x_1=180°k\ ,\ x_2=30°+360°k\ ,\ x_3=150°+360°k$

ח. $x_1=-60+360°k\ ,\ x_2=60°+360°k\ ,\ x_3=120°+360°k\ ,\ x_4=240°+360°k$ .

# משוואות עם תחום נתון:

## סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- $k$ ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

## שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

1) $8\sin x-4=0\ ,\ [0°:180°]$.
2) $\sin 2x=\sin(x+60°)\ ,\ [-90°:90°]$.
3) $3\cos(2x+30°)+1=0\ ,\ [-90°:90°]$.
4) $\cos(50°-x)=-\cos x\ ,\ [0°:360°]$.
5) $2\sin 3x-5\cos 3x=0\ ,\ [-30°:30°]$.
6) $2\cos^2 3x=\sin 6x+1\ ,\ [0°:180°]$.
7) $\cos 4x+1=3\sin 2x\ ,\ [-180°:180°]$.
8) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0\ ,\ [-180°:180°]$.

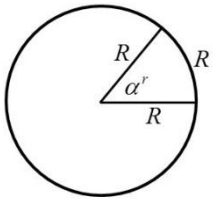
## תשובות סופיות:

1) $x=30°\ ,\ 150°$.
2) $x=-80°\ ,\ 40°\ ,\ 60°$.
3) $x=39.736°\ ,\ -69.736°$.
4) $x=115°\ ,\ 295°$.
5) $x=22.733°$.
6) $x=7.5°\ ,\ 37.5°\ ,\ 67.5°\ ,\ 97.5°\ ,\ 127.5°\ ,\ 157.5°$.
7) $x=-165°\ ,\ -105°\ ,\ 15°\ ,\ 75°$.
8) $x=-138.19°\ ,\ -41.81°\ ,\ 90°$.

# משוואות עם זוויות ברדיאנים:

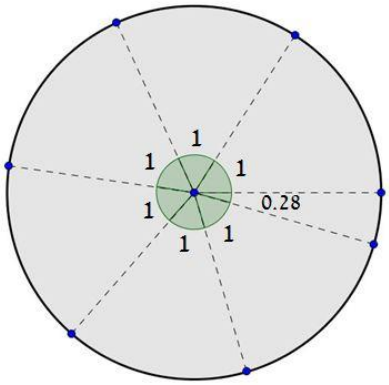
## סיכום כללי:

**הגדרת הרדיאן:**




זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו $R$, תימצאנה $2\pi$ רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P=2\pi\cdot R$.




באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל-$2\pi=6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל.
הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד,
כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן.
מקבלים $2\pi$ רדיאנים.

**קשר בין רדיאנים למעלות:**

- נוסחת מעבר מזווית $\alpha^\circ$ (במעלות) לזווית $\alpha^r$ (ברדיאנים): $\alpha^r=\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית $\alpha^r$ (ברדיאנים) לזווית $\alpha^\circ$ (במעלות): $\alpha^\circ=\frac{180}{\pi}\alpha^r$.

**פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:**

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר $x$ הוא משתנה ו- $\alpha$ היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

| המשוואה | הפתרון |
|---|---|
| $\sin x=\sin\alpha$ | $x_1=\alpha+2\pi k\ ,\ x_2=\pi-\alpha+2\pi k$ |
| $\cos x=\cos\alpha$ | $x_{1,2}=\pm\alpha+2\pi k$ |
| $\tan x=\tan\alpha$ | $x=\alpha+\pi k$ |
| $\cot x=\cot\alpha$ | $x=\alpha+\pi k$ |

כאשר $k$ מספר שלם.

## שאלות:

**1)** המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $30°$ | ב. $90°$ | ג. $75°$ | ד. $120°$ |
| ה. $210°$ | ו. $315°$ | ז. $18°$ | ח. $285°$ |
| ט. $-15°$ | י. $-80°$ | יא. $510°$ | יב. $-390°$ |

**2)** המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $\pi$ | ב. $2\pi$ | ג. $4\pi$ | ד. $1.5\pi$ |
| ה. $\frac{1}{2}\pi$ | ו. $\frac{\pi}{4}$ | ז. $\frac{\pi}{6}$ | ח. $\frac{1}{18}\pi$ |
| ט. $\frac{13}{18}\pi$ | י. $\frac{19}{12}\pi$ | יא. $1\frac{1}{6}\pi$ | יב. $2\frac{1}{4}\pi$ |

**3)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x=1$ , $\left[0:\frac{1}{3}\pi\right]$

ב. $\sqrt{3}+2\cos x=0$ , $[0:\pi]$

ג. $3-3\tan\frac{x}{2}=0$ , $[0:2\pi]$

ד. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , $[0:\pi]$

ה. $4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2=0$ , $\left[0:\frac{1}{2}\pi\right]$

ו. $\sin x=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)$ , $\left[-\frac{5\pi}{18}:\frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5-5\tan\left(4x-0.1\pi\right)=0$ , $\left[0:\frac{\pi}{3}\right]$

ח. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0.7$ , $\left[-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4}\right]$

**4)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x=\frac{3}{4}$ , $\left[0:\frac{\pi}{2}\right]$

ב. $16\cos^2 2x-1=0$ , $\left[-\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x-18=0$ , $[0:\pi]$

ד. $3\sin x\cos x+3\cos x=0$ , $\left[-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x-5\sin x\cos x=0$ , $\left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right]$

ו. $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$ , $[-\pi:\pi]$

ז. $4\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x-1=0$ , $[-\pi:0]$

ח. $\tan^2 x-7\tan x+10=0$ , $[0:2\pi]$

**5)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \le x \le \pi \ , \ \sin x = \cos\left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

ב. $0 \le x \le \pi \ , \ \tan x = 4\sin x$

ג. $0 \le x \le 2\pi \ , \ 2\sin^2 x = 3\cos x$

**6)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $\left[ -\pi : \pi \right] \ , \ \sin\left( x - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin x$

ב. $\left[ 0 : \pi \right] \ , \ \sin\left( 2x + \frac{2}{9}\pi \right) = -\cos 2x$

ג. $\left[ 0 : \pi \right] \ , \ \sin 4x = -\cos\left( \pi - x \right)$

ד. $\left[ -\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} \right] \ , \ \tan x = -\tan 2x$

**7)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \le x \le \pi \ , \ \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $\left[ -\pi : \pi \right] \ , \ \cos 4x + 1 = 3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \le x \le \pi \ , \ \cos 4x + \sin^2 x = 1$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

**2)** א. $180°$ ב. $360°$ ג. $720°$ ד. $270°$ ה. $90°$

ו. $45°$ ז. $30°$ ח. $10°$ ט. $130°$ י. $285°$

יא. $210°$ יב. $405°$.

**3)** א. $x=\frac{\pi}{18}\ ,\ \frac{5\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

**4)** א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. $\phi$ ג. $x=0.398\pi, 0.602\pi$ ד. $\phi$

ה. $x=0, 0.437\pi$ ו. $x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$

ז. $-0.615\pi\ ,\ x=-\frac{\pi}{4}$ ח. $1.437\pi\ ,\ 1.352\pi\ ,\ 0.437\pi\ ,\ x=0.352\pi$.

**5)** א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $\pi\ ,\ 0.42\pi\ ,\ x=0$ ג. $x=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}$

**6)** א. $-\frac{11\pi}{12}\ ,\ x=\frac{\pi}{12}$ ב. $x=\frac{23\pi}{72}\ ,\ \frac{59\pi}{72}$

ג. $x=\frac{\pi}{10}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{9\pi}{10}$ ד. $0\ ,\ x=\pm\frac{\pi}{3}$.

**7)** א. $0.852\pi\ ,\ -0.148\pi\ ,\ x=\pm\frac{\pi}{2}$ ב. $-\frac{7\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{5\pi}{12}\ ,\ \frac{11\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $\pi\ ,\ 0.61\pi\ ,\ 0.38\pi\ ,\ x=0$.