פיזיקה 1 א לכימאים

פרק 13 - מרכז מסה

תוכן העניינים

הסבר בסיסי על מרכז מסה:

רקע

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד , לדוגמה לרכיב x :

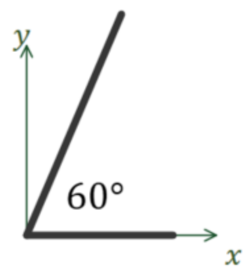
$$x_{c.m.} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

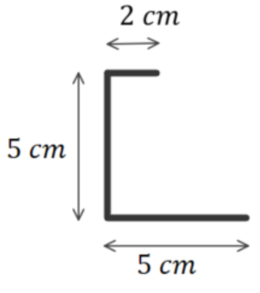
$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

שאלות:

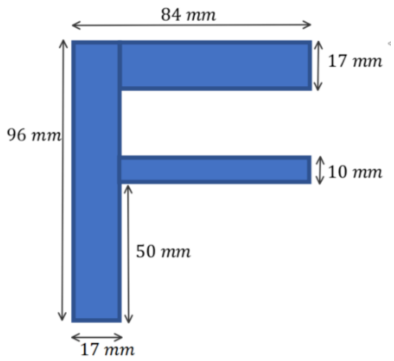
1) **דוגמה - מרכז מסה של שני מוטות בזווית**
המערכת המתוארת באיור מורכבת משני מוטות בעלי צפיפות אחידה.
מוט ראשון באורך 3c.m נמצא לאורך ציר ה- x
ומסתו 2kg , מוט שני נמצא בזווית 60° עם ציר ה- x
החיובי אורכו 5c.m ומסתו 3kg.
מצאו את מרכז המסה של המערכת (ביחס לראשית).



2) **דוגמה - מרכז מסה של האות נ**
המערכת המתוארת באיור מורכבת ממוט בעל צפיפות מסה אחידה המכופף בצורת האות "נ" בתמונת מראה.
מצאו את מיקום מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה.



3) דוגמה - מרכז מסה של F



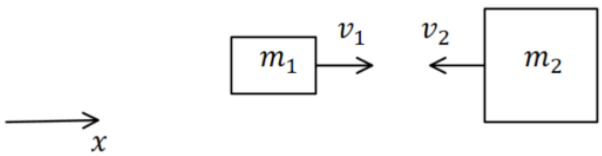
מרכיבים את האות F מלוחות בעלי צפיפות מסה אחידה ליחידת שטח.
המימדים של כל הלוחות נתונים באיור.

א. מצאו את מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה של האות.

ב. מהו מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה הימנית התחתונה של האות?

4) דוגמה - מהירות מרכז מסה בהתנגשות

שני גופים בעלי מסות m_1 ו-m_2 נעים על קו ישר אחד כלפי השני במהירויות v_1 ו- v_2. חשבו את מהירות מרכז המסה לפני ואחרי ההתנגשות.



תשובות סופיות:

1) $x_{c.m}=1.35c.m \quad , \quad y_{c.m}=1.3c.m$

2) $x_{c.m}=1.2c.m \quad , \quad y_{c.m}=1.875c.m$

3) א. $x_{c.m}=31mm \quad , \quad y_{c.m}=62mm$ ב. $x_{c.m}=14mm \quad , \quad y_{c.m}=62mm$

4) $\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

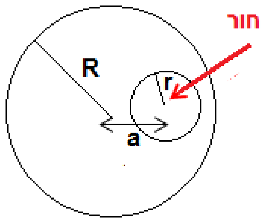
דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור:

שאלות:

1) דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור

בדסקה בעלת רדיוס R ומסה M קדחו חור עגול בעל רדיוס r במרחק a ממרכז הדסקה. הנח כי צפיפות המסה אחידה בכל הדסקה.

מצא את מרכז המסה של הדסקה עם החור.



תשובות סופיות:

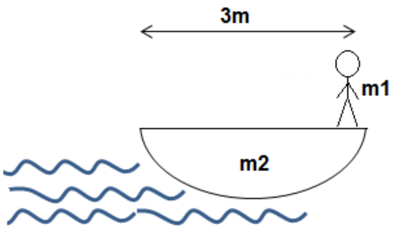
1) $$x_{\text{c.m.}} = \frac{-a\left(\rho\pi r^2\right)}{\mathrm{M}-\left(\rho\pi r^2\right)}$$

שני תרגילים:

שאלות:

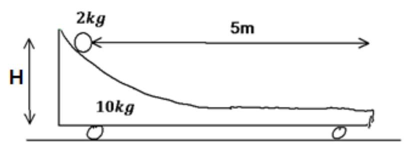
1) נער על סירה

אדם עומד בקצה סירה באורך 3 מטר.
מסת האדם היא 70 קילוגרם ומסת הסירה 100 קילוגרם.
האדם התקדם 2 מטרים לאורך הסירה.
כמה זזה הסירה?
(הזנח את החיכוך בין המים לסירה).
נתון: $m_1 = 70kg$, $m_2 = 100kg$.



2) כדור על קרונית

כדור מונח על קרונית משופעת הנמצאת במנוחה.
הכדור מונח בגובה $H = 1m$ ובמרחק של $5m$ מטר מקצה הקרונית.
מסת הקרונית: $m_1 = 10kg$, מסת הכדור: $m_2 = 2kg$.



א. מצא את העתק הקרונית כאשר הכדור מגיע לקצה.
ב. מצא את מהירות הגופים אם נתון שמהירות הכדור בקצה הקרונית היא רק בכיוון ציר ה- x .

תשובות סופיות:

1) $x = \frac{14}{17}\,m$

2) א. $\Delta x_1 = -\frac{10}{12}\,m$ ב. $u_1 \approx -0.82\frac{m}{sec}$, $u_2 \approx 4.08\frac{m}{sec}$

דוגמאות לחישוב מרכז מסה בעזרת אינטגרלים:

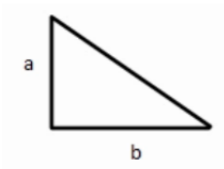
שאלות:

1) מרכז מסה של מוט עם צפיפות לא משתנה

חשב את מרכז המסה של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x)=\lambda_0 \frac{x}{L}$.

2) מרכז מסה של משולש

מצא את מרכז המסה של המשולש שבתמונה.

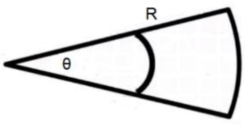


3) מרכז מסה של שער

שער חשמלי בעל מסה m ואורך l מונח על ציר שמרחקו d מסופו.
הסבר מדוע מחוברים לקצה השער משקולת כבדה
ומצא את מסתה אם נתון כי אורכה L.

4) מרכז מסה של גיזרה וחצי דיסקה

חשב את מרכז המסה של גיזרה עם צפיפות אחידה וזווית θ.

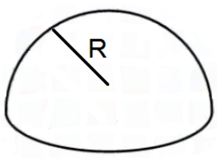


5) חישוב שטח גיזרה

נתון מעגל שרדיוסו R.
חשב שטח של גיזרה עם זווית θ.

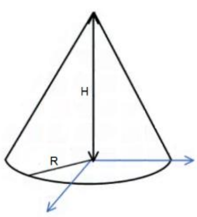
6) מרכז מסה של חצי כדור מלא

חשב את מרכז המסה של חצי כדור מלא בעל צפיפות אחידה.



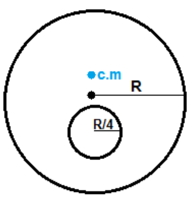
7) מרכז מסה של חרוט מלא

חשב את מרכז המסה של חרוט מלא בעל צפיפות אחידה.



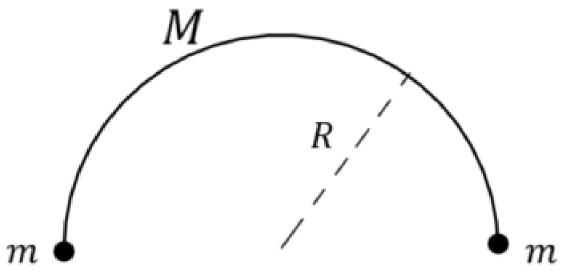
8) דיסקה עם חור

חשב את מרכז המסה של חרוט מלא בעל צפיפות אחידה.



9) **חצי חישוק ושתי מסות**

מצאו את מרכז המסה של חצי החישוק בעל מסה M ורדיוס R אשר בקצותיו חוברו שני כדורים קטנים בעלי מסה m.



תשובות סופיות:

1) $x_{c.m.}=\frac{2}{3}L$

2) $r_{c.m}=\left(\frac{1}{3}b,\frac{1}{3}a\right)$

3) $\frac{\left(\frac{L}{2}-d\right)m+\left(d+\frac{l}{2}\right)M}{m+M}=0$

4) $x_{c.m.}=\frac{4R\sin\frac{\theta_0}{2}}{3\theta_0}$

5) $S=\frac{\theta R^2}{2}$

6) $z_{c.m.}=\frac{3R}{8}$

7) $z_{c.m.}=\frac{H}{4}$

8) $z_{c.m.}=-\frac{1}{30}R$

9) $y_{c.m.}=\frac{2RM}{\pi(M+2m)}$

מערכת מרכז המסה:

רקע:

התנע הכולל של מערכת:

$$\vec{p}_T = M\vec{v}_{c.m.}$$

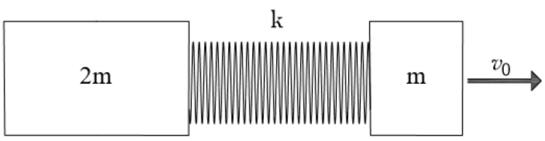
ניתן להסתכל על מערכת כגוף נקודתי שמסתו היא סכום המסות ומהירותו היא מהירות מרכז המסה.

מערכת מרכז המסה היא מערכת שזזה ביחד עם נקודת מרכז המסה. בשביל למצוא את מהירות הגופים במערכת מרכז המסה נשתמש בטרנספורמציית גליליי.

במערכת מרכז המסה התנע הכולל של המערכת הוא אפס
ולכן, במקרה של שני גופים, הגופים תמיד ינועו על ציר אחד.
ואם ההתנגשות אלסטית אז גודל המהירות של כל גוף נשמר.

שאלות:

1) שני גופים מחוברים בקפיץ ונעים

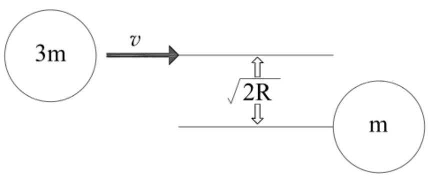


שני גופים עם מסות $m_1 = m$, $m_2 = 2m$
קשורים בקפיץ בעל קבוע k ומונחים
על משטח חסר חיכוך.
ברגע מסוים מעניקים לגוף m_1 מהירות v_0 כך שהוא מתרחק מהמסה m_2.

א. מה מהירות מרכז המסה $v_{c.m.}$?
ב. מה מהירויות שני הגופים במערכת מרכז המסה מיד עם תחילת התנועה?
ג. מה האנרגיה הקינטית הכוללת מיד עם תחילת התנועה במערכת המעבדה ובמערכת מרכז המסה?
ד. מהי ההתארגות המקסימלית של הקפיץ? מה מהירויות שני הגופים במצב זה (גם במערכת מרכז המסה וגם במערכת המעבדה)?
ה. מה מהירויות שני הגופים (בשתי מערכות הייחוס) בפעם הראשונה בה הקפיץ חוזר לאורכו המקורי?

2) התנגשות לא חזיתית

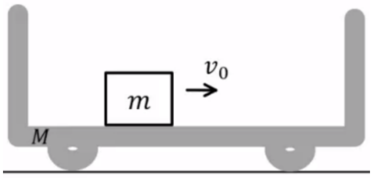
שתי דיסקות ברדיוס זהה R נמצאות על משטח ללא חיכוך.
הדיסקה $m_1 = m$ נמצאת במנוחה



והדיסקה $m_2 = 3m$ נעה במהירות v כלפיה.
המרחק בין מרכז דיסקה 1, למסלול של מרכז דיסקה 2 הוא $\sqrt{2}R$ כמתואר באיור.
אין חיכוך בין שפות הדיסקות במהלך ההתנגשות וההתנגשות האלסטית.

א. תארו את תנועתן במערכת מרכז המסה לפני ההתנגשות.
ב. באיזו נקודה על פני כל דיסקה תהיה ההתנגשות ביניהן?
מה כיוון הכוח ביניהן בעת ההתנגשות?
ג. מה היו וקטורי המהירות אחרי ההתנגשות במערכת מרכז המסה?
ד. מה יהיו המהירויות, גודלן וכיוונן אחרי ההתנגשות במערכת המעבדה?
ה. מה המתקף שהפעיל כדור 2 על כדור 1? חשבו בשתי המערכות.

3) גוף מתנגש בדפנות עגלה



גוף שמסתו m מונח בתוך עגלה שמסתה M.
העגלה נמצאת במנוחה על משטח אופקי ואין חיכוך בינה לבין המשטח.
מקנים לגוף מהירות התחלתית v_0 והוא נע הלוך ושוב בין דפנות העגלה ללא חיכוך.
ההתנגשות של הגוף עם הדפנות היא התנגשות אי-אלסטית.
מה תהיה מהירות הגוף ביחס לקרקע לאחר זמן רב?

4) זווית פיזור אפשרית באיבוד אנרגיה**

חלקיק בעל מסה M נע במהירות קבועה לאורך ציר ה-x.
כאשר האנרגיה הקינטית שלו היא K.
החלקיק פוגע בחלקיק אחר, בעל מסה זהה הנמצא במנוחה.
האנרגיה של כל המערכת לאחר ההתנגשות היא αK כאשר α קבוע חיובי נתון, הקטן מ-1.

א. מהי מהירות מרכז המסה לפני ואחרי ההתנגשות?
ב. האם ניתן לדעת את כיוון המהירות של החלקיק הפוגע, במערכת מרכז המסה, לפני ואחרי ההתנגשות?
ג. אם $\alpha = 0.6$, מה תחום זוויות הפיזור האפשריות?
מומלץ לצפות בסרטון ההוכחה שהזווית בין שני גופים בעלי מסות זהות המתנגשים התנגשות אלסטית היא 90 מעלות.

תשובות סופיות:

1) א. $v_{c.m.}=\frac{v_0}{3}$ ב. $v_{2_{c.m.}}=-\frac{v_0}{3}$, $v_{1_{c.m.}}=\frac{2v_0}{3}$

ג. מעבדה: $E_k=\frac{1}{2}mv_0^2$, מרכז המסה: $E_k=\frac{1}{3}mv_0^2$

ד. מעבדה: $\Delta x_{\max/\min}=\sqrt{\frac{2mv_0^2}{3k}}$, $\frac{v_0}{3}$, מרכז המסה: $\Delta u_{c.m.}=0$, 0

ה. מעבדה: $u_1=-\frac{1}{3}v_0$, $u_2=\frac{2v_0}{3}$, מרכז המסה: $u_{1_{c.m.}}=-\frac{2v_0}{3}$, $u_{2_{c.m.}}=\frac{v_0}{3}$

2) א. $v_{2_{c.m.}}=\frac{1}{4}v$, $v_{1_{c.m.}}=-\frac{3}{4}v$ ב. $\alpha=45°$ ג. בכיוון ציר y השלילי - $\left|\vec{v}_{1_{c.m.}}\right|=\frac{3}{4}v$,

בכיוון ציר y החיובי - $\left|u_{2_{c.m.}}\right|=\frac{1}{4}v$ ד. $\alpha_1=-45°$, $u_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 3v$,

$u_2=\frac{\sqrt{10}}{4}v$, $\alpha_2=18.4°$ ה. במעבדה: $\vec{J}_{2\to 1}=\Delta\vec{P}_1=mv\cdot\frac{3}{4}(1,-1)$,

במרכז המסה: $\vec{J}=\int Ndt=m\frac{3}{4}v(1,-1)$

3) $u=\frac{mv_0}{m+M}$

4) א. $v_{c.m.}=\frac{v}{2}$ ב. לפני: באותו כיוון , אחרי: לא ניתן. ג. $-48.2°\le\theta\le 48.2°$

תרגילים מסכמים:

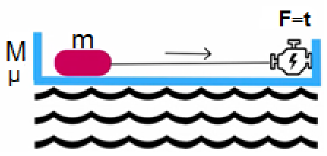
שאלות:

1) שני גופים מחוברים בקפיץ נלחצים לקיר

שני גופים מחוברים בקפיץ בעל קבוע k ונמצאים על משטח אופקי חסר חיכוך.
מסת הגוף הימני היא m_1, מסת הגוף השמאלי היא m_2 והוא צמוד לקיר.
האורך הרפוי של הקפיץ הוא l_0.
לוחצים את הגוף הימני עד שהקפיץ מתכווץ לאורך $\frac{l_0}{3}$ ומשחררים ממנוחה.

א. מתי תתנתק המסה השמאלית מהקיר?
ב. מהו מיקום מרכז המסה כתלות בזמן?

2) מנוע מושך מסה בסירה

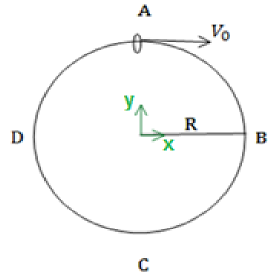


על סירה (ללא חיכוך עם המים) מונחת מסה.
המסה מחוברת בחוט למנוע המחובר לסירה.
כוח המשיכה של המנוע משתנה בזמן,
מקדם החיכוך הסטטי ומקדם החיכוך הקינטי נתונים.

א. מתי תתחיל לנוע המסה?
ב. מה תהיה תאוצת מרכז המסה? תאוצת הסירה? תאוצת המסה?
ג. לאחר שהמסה נעה החוט ניתק. ענה שוב על סעיף ב'.
ד. האם המסה והסירה ייעצרו בו זמנית?

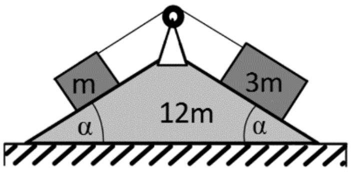
3) חרוז מסתובב על חישוק שחופשי לנוע

חישוק בעל רדיוס R ומסה m מונח על שולחן אופקי חלק.
על החישוק ישנו חרוז המתחיל לנוע מהנקודה A ומסתו m גם כן.
ב-$t=0$ החישוק נמצא במנוחה ומהירותו ההתחלתית
של החרוז היא v_0 ימינה.



א. מצא את מיקום מרכז המסה של המערכת בתחילת התנועה.
ב. מצא את מהירות מרכז המסה כפונקציה של הזמן ואת מסלולה.
ג. מהן מהירויות החרוז והצינור כאשר החרוז נמצא בנקודות D, C, B ושוב ב-A ביחס לחישוק?

4) שני גופים על מדרון שנע

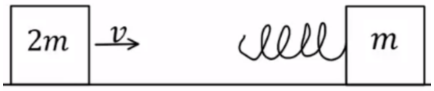


שני גופים בעלי מסות m ו- 3m נמצאים על מדרון דו-צדדי בעל זווית נטייה α משני צדדיו.
שני הגופים קשורים זה לזה בחוט אידיאלי דרך גלגלת אידיאלית המחוברת למדרון.
למדרון מסה 12m והוא יכול לנוע על הרצפה.
אין חיכוך בין הגופים למדרון ובין המדרון לרצפה.
משחררים את המערכת ממנוחה.

א. חשב את העתק המדרון, לאחר שהגוף הכבד עבר מרחק L במורד המדרון.
ב. מהי העבודה שביצע משקל הגוף הכבד ומשקל הגוף הקל במהלך התנועה?
ג. חשב את מהירות המדרון ביחס לרצפה ברגע זה.

5) מסה מתנגשת במסה עם קפיץ

גוף שמסתו 2m נע במהירות v על משטח חסר חיכוך לעבר גוף נוסף שמסתו m הנמצא במנוחה. בצידו השמאלי של הגוף במנוחה ישנו קפיץ רפוי בעל קבוע k.
הבעיה חד מימדית.



א. מהי מהירות מרכז המסה של הגופים?
ב. מהי ההתכווצות המקסימאלית של הקפיץ?

תשובות סופיות:

1) א. כאשר הקפיץ מגיע לנקודת רפיון או ב- $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}$.

ב. $x_{c.m.}(d)=\frac{m_1 l_0}{m_1+m_2}\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{m_1 k t}\right)$

2) א. $\mu\cdot mg=t$ ב. $-a=\frac{t}{M}$, $a=\frac{t}{m}$ ג. $-a=\mu\cdot g$, $a=\mu\cdot g\frac{m}{M}$

ד. כן.

3) א. $y_{c.m.}(t=0)=\frac{R}{2}$ ב. $\vec{v}_{c.m.}(t)=\frac{1}{2}v_0\hat{x}$

ג. בנקודה B: $u_{1_y}=\frac{-v_0}{2}=-u_{2_y}$, $u_{1_x}=\frac{1}{2}v_0=u_{2_x}$,

בנקודה C: $u_{1_x}=0$, $u_{2_x}=v_0$, $u_{1_y}=0=u_{2_y}$,

בנקודה D: $u_{1_y}=\frac{v_0}{2}=-u_{2_y}$, $u_{1_x}=u_{2_x}=\frac{1}{2}v_0$

4) א. $x_2=-\frac{L\cos\alpha}{4}$ ב. הכבד: $W=3mgL\sin\alpha$, הקל: $W=mg(-L\sin\alpha)$

ג. $v_{2_x}=\sqrt{\frac{gL\sin\alpha}{4(4\tan^2\alpha+3)}}$

5) א. $v_{c.m.}=\frac{2}{3}v$ ב. $\Delta x_{max}=\sqrt{\frac{10m}{3k}}\cdot v$