מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 11 - מרכז מסה

תוכן העניינים

1. הסבר בסיסי על מרכז מסה 1
2. דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור 3
3. תנועה לפי הכוחות החיצוניים ..... (ללא ספר)
4. שני תרגילים 4
5. חישוב מרכז מסה של גופים גדולים בעזרת אינטגרל ..... (ללא ספר)
6. דוגמאות לחישוב מרכז מסה בעזרת אינטגרלים 5
7. תרגילים מסכמים 7

הסבר בסיסי על מרכז מסה:

רקע

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

ניתן לרשום אותה לכל רכיב בנפרד , לדוגמה לרכיב x :

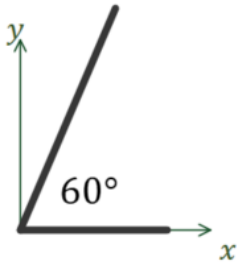
$$x_{c.m.} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

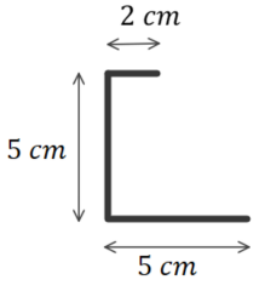
שאלות:

1) דוגמה - מרכז מסה של שני מוטות בזווית



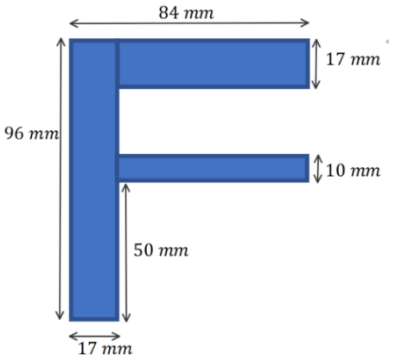
המערכת המתוארת באיור מורכבת משני מוטות בעלי צפיפות אחידה.
מוט ראשון באורך 3c.m נמצא לאורך ציר ה- x
ומסתו 2kg , מוט שני נמצא בזווית 60° עם ציר ה- x
החיובי אורכו 5c.m ומסתו 3kg .
מצאו את מרכז המסה של המערכת (ביחס לראשית).

2) דוגמה - מרכז מסה של האות נ



המערכת המתוארת באיור מורכבת ממוט בעל צפיפות מסה אחידה המכופף בצורת האות "נ" בתמונת מראה.
מצאו את מיקום מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה.

3) דוגמה - מרכז מסה של F



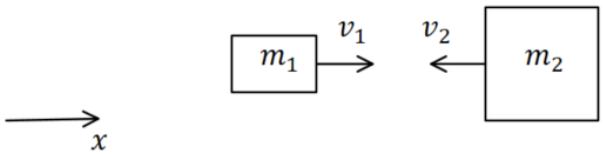
מרכיבים את האות F מלוחות בעלי צפיפות מסה אחידה ליחידת שטח.
המימדים של כל הלוחות נתונים באיור.

א. מצאו את מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה של האות.

ב. מהו מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה הימנית התחתונה של האות?

4) דוגמה - מהירות מרכז מסה בהתנגשות

שני גופים בעלי מסות m_1 ו-m_2 נעים על קו ישר אחד כלפי השני במהירויות v_1 ו- v_2. חשבו את מהירות מרכז המסה לפני ואחרי ההתנגשות.



תשובות סופיות:

1) $x_{c.m}=1.35c.m$, $y_{c.m}=1.3c.m$

2) $x_{c.m}=1.2c.m$, $y_{c.m}=1.875c.m$

3) א. $x_{c.m}=31mm$, $y_{c.m}=62mm$ ב. $x_{c.m}=14mm$, $y_{c.m}=62mm$

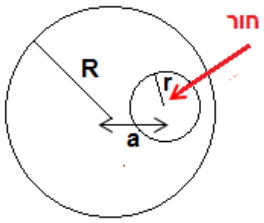
4) $\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור:

שאלות:

1) דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור

בדסקה בעלת רדיוס R ומסה M קדחו חור עגול בעל רדיוס r במרחק a ממרכז הדסקה. הנח כי צפיפות המסה אחידה בכל הדסקה.
מצא את מרכז המסה של הדסקה עם החור.



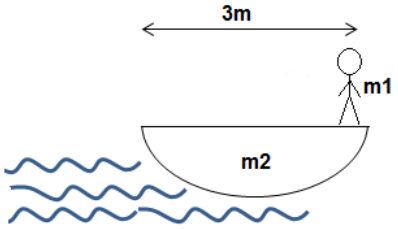
תשובות סופיות:

1) $x_{\text{c.m.}} = \dfrac{-a\left(\rho\pi r^2\right)}{\mathrm{M}-\left(\rho\pi r^2\right)}$

שני תרגילים:

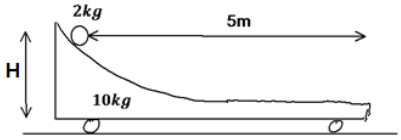
שאלות:

1) נער על סירה



אדם עומד בקצה סירה באורך 3 מטר.
מסת האדם היא 70 קילוגרם ומסת הסירה 100 קילוגרם.
האדם התקדם 2 מטרים לאורך הסירה.
כמה זזה הסירה?
(הזנח את החיכוך בין המים לסירה).
נתון: $m_1 = 70kg$, $m_2 = 100kg$.

2) כדור על קרונית



כדור מונח על קרונית משופעת הנמצאת במנוחה.
הכדור מונח בגובה $H = 1m$ ובמרחק של $5m$ מטר מקצה הקרונית.
מסת הקרונית: $m_1 = 10kg$, מסת הכדור: $m_2 = 2kg$.

א. מצא את העתק הקרונית כאשר הכדור מגיע לקצה.

ב. מצא את מהירות הגופים אם נתון שמהירות הכדור בקצה הקרונית היא רק בכיוון ציר ה-x.

תשובות סופיות:

1) $x = \frac{14}{17}m$

2) א. $\Delta x_1 = -\frac{10}{12}m$ ב. $u_2 \approx 4.08\frac{m}{sec}$, $u_1 \approx -0.82\frac{m}{sec}$

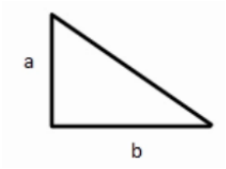
דוגמאות לחישוב מרכז מסה בעזרת אינטגרלים:

שאלות:

1) מרכז מסה של מוט עם צפיפות לא משתנה

חשב את מרכז המסה של מוט בעל אורך L וצפיפות מסה $\lambda(x)=\lambda_0\frac{x}{L}$.

2) מרכז מסה של משולש



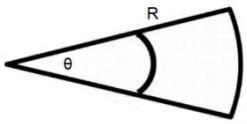
מצא את מרכז המסה של המשולש שבתמונה.

3) מרכז מסה של שער

שער חשמלי בעל מסה m ואורך l מונח על ציר שמרחקו d מסופו.
הסבר מדוע מחוברים לקצה השער משקולת כבדה
ומצא את מסתה אם נתון כי אורכה L.



4) מרכז מסה של גיזרה וחצי דיסקה

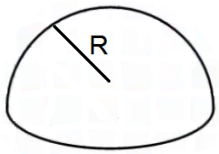


חשב את מרכז המסה של גיזרה עם צפיפות אחידה וזווית θ.

5) חישוב שטח גיזרה

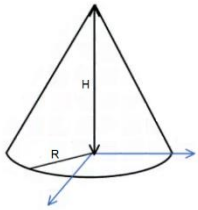
נתון מעגל שרדיוסו R.
חשב שטח של גיזרה עם זווית θ.

6) מרכז מסה של חצי כדור מלא



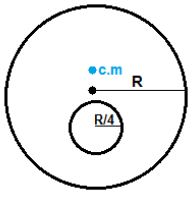
חשב את מרכז המסה של חצי כדור מלא בעל צפיפות אחידה.

7) מרכז מסה של חרוט מלא



חשב את מרכז המסה של חרוט מלא בעל צפיפות אחידה.

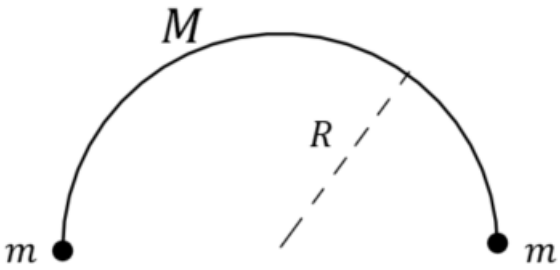
8) דיסקה עם חור



חשב את מרכז המסה של חרוט מלא בעל צפיפות אחידה.

9) חצי חישוק ושתי מסות

מצאו את מרכז המסה של חצי החישוק בעל מסה M ורדיוס R אשר בקצותיו חוברו שני כדורים קטנים בעלי מסה m.



תשובות סופיות:

1) $x_{c.m.}=\frac{2}{3}L$

2) $r_{c.m}=\left(\frac{1}{3}b,\frac{1}{3}a\right)$

3) $\frac{\left(\frac{L}{2}-d\right)m+\left(d+\frac{l}{2}\right)M}{m+M}=0$

4) $x_{c.m.}=\frac{4R\sin\frac{\theta_0}{2}}{3\theta_0}$

5) $S=\frac{\theta R^2}{2}$

6) $z_{c.m.}=\frac{3R}{8}$

7) $z_{c.m.}=\frac{H}{4}$

8) $z_{c.m.}=-\frac{1}{30}R$

9) $y_{c.m.}=\frac{2RM}{\pi(M+2m)}$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) שני גופים מחוברים בקפיץ נלחצים לקיר

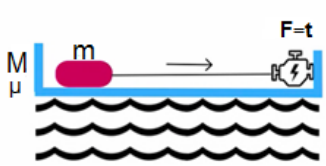
שני גופים מחוברים בקפיץ בעל קבוע k ונמצאים על משטח אופקי חסר חיכוך.
מסת הגוף הימני היא m_1, מסת הגוף השמאלי היא m_2 והוא צמוד לקיר.
האורך הרפוי של הקפיץ הוא l_0.

לוחצים את הגוף הימני עד שהקפיץ מתכווץ לאורך $\frac{l_0}{3}$ ומשחררים ממנוחה.

א. מתי תתנתק המסה השמאלית מהקיר?

ב. מהו מיקום מרכז המסה כתלות בזמן?

2) מנוע מושך מסה בסירה



על סירה (ללא חיכוך עם המים) מונחת מסה.
המסה מחוברת בחוט למנוע המחובר לסירה.
כוח המשיכה של המנוע משתנה בזמן,
מקדם החיכוך הסטטי ומקדם החיכוך הקינטי נתונים.

א. מתי תתחיל לנוע המסה?

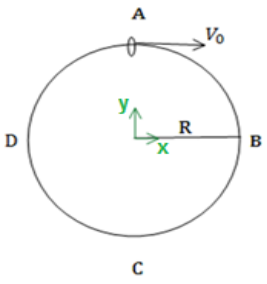
ב. מה תהיה תאוצת מרכז המסה? תאוצת הסירה? תאוצת המסה?

ג. לאחר שהמסה נעה החוט ניתק. ענה שוב על סעיף ב'.

ד. האם המסה והסירה ייעצרו בו זמנית?

3) חרוז מסתובב על חישוק שחופשי לנוע

חישוק בעל רדיוס R ומסה m מונח על שולחן אופקי חלק.
על החישוק ישנו חרוז המתחיל לנוע מהנקודה A ומסתו m גם כן.
ב-$t=0$ החישוק נמצא במנוחה ומהירותו ההתחלתית של החרוז היא v_0 ימינה.

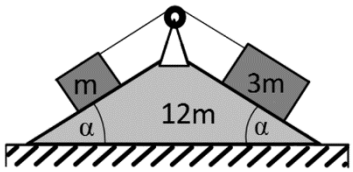


א. מצא את מיקום מרכז המסה של המערכת בתחילת התנועה.

ב. מצא את מהירות מרכז המסה כפונקציה של הזמן ואת מסלולה.

ג. מהן מהירויות החרוז והצינור כאשר החרוז נמצא בנקודות B, C, D ושוב ב-A ביחס לחישוק?

4) שני גופים על מדרון שנע

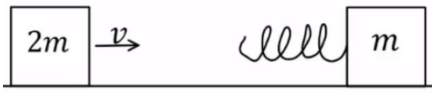


שני גופים בעלי מסות m ו-$3m$ נמצאים על מדרון דו-צדדי בעל זווית נטייה α משני צדדיו.
שני הגופים קשורים זה לזה בחוט אידיאלי דרך גלגלת אידיאלית המחוברת למדרון.
למדרון מסה $12m$ והוא יכול לנוע על הרצפה.
אין חיכוך בין הגופים למדרון ובין המדרון לרצפה.
משחררים את המערכת ממנוחה.

א. חשב את העתק המדרון, לאחר שהגוף הכבד עבר מרחק L במורד המדרון.
ב. מהי העבודה שביצע משקל הגוף הכבד ומשקל הגוף הקל במהלך התנועה?
ג. חשב את מהירות המדרון ביחס לרצפה ברגע זה.

5) מסה מתנגשת במסה עם קפיץ

גוף שמסתו $2m$ נע במהירות v על משטח חסר חיכוך לעבר גוף נוסף שמסתו m הנמצא במנוחה. בצידו השמאלי של הגוף במנוחה ישנו קפיץ רפוי בעל קבוע k. הבעיה חד מימדית.



א. מהי מהירות מרכז המסה של הגופים?
ב. מהי ההתכווצות המקסימאלית של הקפיץ?

תשובות סופיות:

1) א. כאשר הקפיץ מגיע לנקודת רפיון או ב- $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}$.

ב. $x_{c.m.}(d)=\frac{m_1 l_0}{m_1+m_2}\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{m_1 k}t\right)$

2) א. $\mu\cdot mg=t$ ב. $a=\frac{t}{m}\ ,\ -a=\frac{t}{M}$ ג. $a=\mu\cdot g\frac{m}{M}\ ,\ -a=\mu\cdot g$

ד. כן.

3) א. $y_{c.m.}(t=0)=\frac{R}{2}$ ב. $\vec{v}_{c.m.}(t)=\frac{1}{2}v_0\hat{x}$

ג. בנקודה B: $u_{1_x}=\frac{1}{2}v_0=u_{2_x}\ ,\ u_{1_y}=\frac{-v_0}{2}=-u_{2_y}$,

בנקודה C: $u_{1_x}=0\ ,\ u_{2_x}=v_0\ ,\ u_{1_y}=0=u_{2_y}$,

בנקודה D: $u_{1_x}=u_{2_x}=\frac{1}{2}v_0\ ,\ u_{1_y}=\frac{v_0}{2}=-u_{2_y}$

4) א. $x_2=-\frac{L\cos\alpha}{4}$ ב. הכבד: $W=3mgL\sin\alpha$, הקל: $W=mg(-L\sin\alpha)$

ג. $v_{2_x}=\sqrt{\frac{gL\sin\alpha}{4(4\tan^2\alpha+3)}}$

5) א. $v_{c.m.}=\frac{2}{3}v$ ב. $\Delta x_{max}=\sqrt{\frac{10m}{3k}}\cdot v$