שיטות מתמטיות 2

פרק 10 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית 1

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב-$\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2 .$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$, ב-$\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$, ב-$\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3 .$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$, ב-$\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\ldots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B ב-$M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות f, g ב-$C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.

2) $k>9$

3) $-1<k<1$

4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$M_{mxn}[R]$.

6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.

7) $$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©